

SÉRIE A, n° 3348

N° D'ORDRE :

4220

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

HENRI DORMONT

1^{re} THÈSE. — OPTIQUE CORPUSCULAIRE DES PINCEAUX D'AXE
COURBE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 décembre 1957 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE..... *Président.*

GRIVET.....

COTTE.....

BOUTRY.....

} *Examineurs.*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1959



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A, N° 3348

N° D'ORDRE :

4220

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

HENRI DORMONT

1^{re} THÈSE. — OPTIQUE CORPUSCULAIRE DES PINCEAUX D'AXE
COURBE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 décembre 1957 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE..... *Président.*

GRIVET.....
COTTE.....
BOUTRY.....

} *Examineurs.*



PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1959

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et	QUENEY	T	Météorologie et dynami-
FOCH	T	Algèbre supérieure.			que atmosphérique.
PAUTHENIER	T	Mécanique physique et	GALLIEN	T	Embryologie.
DE BROGLIE	T	expérimentale.	EICHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.)
PRENANT	T	Électrotechnique générale	DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.)
	T	Théories physiques.	M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.
	T	Anatomie et Histologie	THELLIER	T	Physique du Globe.
		comparées.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	GRIVET	T	Radioélectricité.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
		applications.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie
LAUGIER	T	Physiologie générale.			des nombres.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	QUELET	T	Chimie organique.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
		Géologie appliquée.	CHAMPETIER	T	Chimie macromolé-
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et			culaire.
J. BOURCART	T	Physique mathématique.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et
		Géographie physique et			Géologie appliquée.
		Géologie dynamique.	JUNG	T	Pétrographie.
PLANTEFOL	T	Botanique.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction
GRASSÉ	T	Evolution des êtres orga-			électronique.
		nisés.	WIEMANN	T	Chimie organ. structu-
PRÉVOST	T	Chimie organique.			rale.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physi-
		à la Géométrie.			que céleste.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère
WYART	T	Minéralogie.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
TEISSIER	T	Zoologie.	M. PRUVOST	T	Géologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
P. AUGER	T	Physique quantique et	HOGART	T	Minéralogie.
		Relativité.	J.-P. MATHIEU ...	T	Physique (P.C.B.).
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
PIVETEAU	T	Géologie.	MAY	T	Biologie animale (P.C.B.)
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	CHOQUET	T	Calcul diff. et intégral.
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	FELDMANN	T	Biologie (P.C.B.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
FAYARD	T	Mécanique générale.	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
COULOMB	T	Physique du Globe.	FORTET	T	Calcul des probabilités.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale	SCHWARTZ	T	Méthodes mathématiques
		(P.C.B.).			de la Physique.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
P. DRACH	T	Zoologie.	MALAVARD	T	Aviation.
KASTLER	T	Physique.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
EPHROSSI	T	Génétique.	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
WURMSER	T	Biol. physico-chimique.	BÉNARD	T	Chimie (P.C.B.).
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.)	DUGUÉ	T	Statistiques mathémati-
LUCAS	T	Recherches physiques.			ques.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	GELOSO		Chimie (S.P.C.N.).
ARNULF	T	Optique appliquée.	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
MAX MORAND	T	Physique.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
SOLEILLET	T	Physique.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et
FORTIER	T	Mécanique expérimentale			appliquée.
		des fluides.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
DANJON	T	Astronomie.	CHADEFAUD		Botanique.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.	DESTRIAU		Physique (M.P.C.).
LAPORTE	T	Physique générale et	M ^{lle} LE BRETON ..		Physiologie générale.
		Radioactivité.	SALEM	T	Mathématiques générales.
JANET ...	T	Mécanique analytique et	LELONG	T	Mathématiques générales.
		Mécanique céleste.	DEVILLERS		Anatomie et Histologie
PETIT	T	Biologie maritime.			comparées.

PROFESSEURS (suite)

EHRESMANN	T	Topologie algébrique.	BRUSSET	Chimie (P.C.B.).
FRANÇON		Physique (M.P.C.).	M. LEVY	Physique théorique.
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	LENORMANT	Physiologie
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).	M ^{me} CHAIX	Chimie biologique.
PISOT	T	Calcul des probabilités.	M ^{me} HUREL-PY ...	Biologie végétale (P.C.B.).
E. ROCH		Géologie.	PIAUX	Chimie (P.C.B.).
SCHATZMANN		Astrophysique.	BRUN	Mécanique expérimentale des fluides.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.	LEDERER	Chimie biologique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.	M ^{me} DUBREIL-JACO-	
JOLIOT	T	Physique nucléaire et radioactivité.	TIN	Mathématiques.
LENNUIER		Physique (P.C.B.).	M ^{me} LELONG - FER-	
RIZET		Génétique.	RAND	Mathématiques (E.N.S.).
ROUTHIER		Géologie appliquée.	BELLAIR	Géologie (S.P.C.N.).
M ^{me} TONNELAT ...		Théories physiques.	COTTE	Physique (M.P.C.).
DIXMIER		Mathématiques (M.P.C.).	J. DUBOIS	Chimie.
SOUCHAY		Chimie (P.C.B.).	LAMOTTE	Chimie (P.C.B.).
AIGRAIN		Physique (P.C.B.)	LE ROLLAND	Mécanique des fluides.
			MICHEL	Chimie (S.P.C.N.).
			OLMER	Énergétique générale.

Secrétaire Général C. MONIER.

REMERCIEMENTS

Qu'il nous soit permis d'adresser nos remerciements à MM. les Professeurs L. de Broglie, Grivet, Cotte, Boutry, pour la bienveillance avec laquelle ils ont accueilli ce travail et les conseils qu'ils nous ont prodigués en cours d'étude.

Nous tenons également à remercier la Direction des Laboratoires d'Électronique et de Physique Appliquée, qui en a permis la réalisation.

OPTIQUE CORPUSCULAIRE

DES PINCEAUX D'AXE COURBE ⁽¹⁾

Par HENRI DORMONT

CHAPITRE PREMIER

Les pinceaux d'axe courbe.

Les pinceaux étroits, formés de rayons faiblement inclinés les uns par rapport aux autres, sont fréquemment utilisés aussi bien en optique qu'en optique électronique ou ionique. Leur rayon central est appelé « axe » ; c'est en général une droite qui constitue presque toujours un axe de symétrie ou de révolution du système.

Alors que l'optique n'utilise guère que des rayons formés de segments de droite, l'optique corpusculaire met en jeu des courbes gauches, trajectoires des particules en mouvement, et l'on est amené à envisager l'emploi de pinceaux « paraxiaux » dont l'« axe » est constitué par une courbe quelconque.

En voici quelques exemples :

Les pinceaux fortement inclinés sur l'axe d'un système centré fortement diaphragmé ne possèdent pas les propriétés focalisatrices des pinceaux de faible inclinaison : ils produisent un phénomène de coma. Les rayons de ces pinceaux s'appuient en général sur deux focales distinctes et ne donnent pas lieu à la formation d'images. Par rapport à l'axe rectiligne du système ces aberrations sont des phénomènes « du deuxième ordre » ; elles disparaissent pour de faibles inclinaisons car elles sont décrites en fonction de ces dernières considérées comme infiniment petites par des termes du deuxième ordre au moins.

Si on prend pour axe du système celui du pinceau étroit, ces aberrations deviennent des phénomènes du premier ordre par rapport à l'ouverture de ce pinceau et peuvent s'étudier commodément dans le cadre de l'approximation de Gauss : c'est ainsi qu'il est classique en

(1) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences physiques, et soutenue le 13 décembre 1957 devant la Commission d'examen.

optique de situer la position des focales d'un pinceau qui traverse, sous forte inclinaison, un dioptre ou une lentille fortement diaphragmée. La position de ces éléments se calcule par rapport à l'axe du pinceau, qui est évidemment formé d'une succession de segments de droites. En optique corpusculaire, il est constitué par une courbe gauche.

Ce changement d'axe opère un changement d'échelle des valeurs infiniment petites : l'infiniment petit principal n'est plus l'écart du pinceau à l'axe de révolution du système centré, car cet écart peut être grand si l'inclinaison est forte, mais l'écart du pinceau par rapport à son rayon moyen qui constitue le nouvel « axe ».

D'autres phénomènes se trouvent simplifiés de la même façon par ce changement d'échelle. Les phénomènes d'achromatisme deviennent, par rapport à la dispersion énergétique, supposée petite, des phénomènes du premier ordre : nous appellerons « dérive chromatique » les termes du premier ordre de l'achromatisme, réservant le nom habituel d'aberration aux phénomènes d'ordre supérieur. La « dérive chromatique » est un phénomène général qui disparaît lorsqu'on a affaire à un système d'axe rectiligne dont le champ magnétique ne possède pas, sur cet axe, de composante transversale. C'est, en particulier, le cas des systèmes électrostatiques d'axe rectiligne ; c'est d'ailleurs le cas de la plupart des systèmes électrooptiques habituels. L'achromatisme se traduit alors uniquement par les aberrations du deuxième ordre. Il y a là une analogie avec la confusion systématique des systèmes de focales des pinceaux étroits peu inclinés sur l'axe des systèmes centrés.

Si l'on prend pour axe le rayon moyen du pinceau incliné l'achromatisme redevient un phénomène du premier ordre justiciable de l'approximation de Gauss.

Une illustration des considérations qui précèdent est fournie par l'étude des canons à électrons. Dans ce cas, il ne s'agit pas d'étudier différents pinceaux issus d'une surface objet et plus ou moins inclinés sur l'axe d'un système centré, mais différents comportements d'un même pinceau étroit soumis à des conditions de champs variables en fonction de la déflexion désirée. Dès que cette déflexion est assez forte, ce qui est souvent le cas, on a intérêt à prendre, pour chacune de ses valeurs, l'axe du pinceau pour axe du système. Les conditions de formation de l'image : focalisation, achromatisme, etc., deviennent ainsi des phénomènes du premier ordre que l'on peut calculer et essayer de réduire. En particulier, les pinceaux déviés présentent toujours le phénomène de « dérive chromatique » lié à la présence d'une courbure de l'axe (et éventuellement à celle d'un champ magnétique transverse dû au champ défecteur) qu'il est peut-être possible de réduire par une distribution adéquate des champs. Cette application peut être importante dans le cas des systèmes à électrons lents pour lesquels la dispersion chromatique relative est assez forte.

Les précédents paragraphes ont été consacrés à la description de cas

dans lesquels l'axe courbe provenait d'un « changement d'axe » destiné à faciliter l'étude des aberrations d'un système. Il existe des cas où l'« axe curviligne » se présente d'une façon plus naturelle.

On a proposé de réaliser des tubes à retard dans lesquels un pinceau d'électrons ou d'ions parcourt un trajet aussi long que possible. Si l'on module l'intensité de ce faisceau au voisinage de la source produisant les corpuscules, on peut espérer recueillir, sur l'électrode collectrice, un signal retardé d'une quantité qui dépend de la longueur du trajet et des vitesses mises en jeu. On conçoit que l'on ait intérêt, pour éviter des encombrements prohibitifs, à chercher à réaliser des faisceaux étroits de corpuscules voyageant au voisinage d'un axe courbe qui s'enroule sur lui-même, une hélice semble par exemple assez indiquée. Pour éviter une dispersion catastrophique des corpuscules, il est important de « focaliser » le pinceau autour de cet axe curviligne et, par conséquent, d'étudier son comportement, au moins dans le cas de l'approximation de Gauss. Les temps de transit jouent également dans ce système un rôle important car ce sont eux qui conditionnent le retard. Ils doivent, bien entendu, être autant que possible les mêmes pour tous les corpuscules, ce qui impose certaines conditions qui apparaissent lors de l'étude du mouvement général du pinceau. Là encore les phénomènes d'achromatisme jouent un rôle important.

On peut envisager également l'existence de klystrons dont le pinceau électronique décrive des courbes permettant des passages successifs à travers une même cavité résonnante. Le fonctionnement serait analogue à celui du klystron reflex mais l'optique en serait fort différente. Les conditions de focalisation du pinceau vers l'orifice de la cavité ne peuvent guère s'effectuer, d'une façon générale, en dehors de la théorie des systèmes d'axe courbe. Plus encore que dans l'exemple précédent la considération des temps de transit et des phénomènes d'achromatisme — en particulier de la « dérive chromatique » — est extrêmement importante car la modulation n'est plus une modulation d'intensité, mais une modulation de vitesse. Si cette dernière est grande, il faudra même pousser très loin l'étude des phénomènes d'achromatisme.

Certains tubes à long faisceau du type tube à onde progressive, ou encore carcinotron, pourraient être constitués d'un pinceau courbe, par exemple circulaire, ou d'une nappe d'électrons se propageant au voisinage du système à structure périodique formant la ligne à retard. Le faisceau serait maintenu par un champ électrique et un champ magnétique simultanés tout comme dans les carcinotrons de type M.

Certains appareils de transport d'image mettent en jeu des champs magnétiques qui courbent l'axe de ce transport. Dans cet exemple l'axe curviligne apparaît directement, ce qui n'empêche pas, le cas échéant, d'étudier certains pinceaux inclinés par rapport à leur axe propre. Les phénomènes de dérive chromatique et d'une façon générale les aberrations propres aux systèmes non rectilignes vont intervenir. Il y a lieu

de les étudier pour les corriger car des compensations sont possibles si l'on réalise une distribution convenable des champs et éventuellement des courbures le long de l'axe curviligne du système.

Le domaine de l'optique ionique a, le premier, attiré l'attention des chercheurs sur les propriétés des faisceaux courbes. Alors que les appareils électroniques présentent, en général, une symétrie de révolution, ceux qui mettent en jeu des ions ont utilisé, dès leur début, des trajectoires curvilignes. C'est le cas des spectrographes de masse et de vitesse ainsi que de la plupart des accélérateurs. On doit remarquer cependant que, dans ces derniers, les champs sont généralement variables en fonction du temps; la théorie statique à laquelle nous nous limitons ne leur est pas applicable.

Comme on peut s'en rendre compte sur les exemples que nous venons de citer, la connaissance des champs au voisinage de l'axe est une chose fondamentale et chaque application ne peut être menée jusqu'au bout que par l'association du calcul et de moyens expérimentaux appropriés, en particulier, des appareils classiques pour la détermination des cartes de potentiels et la mesure des champs.

CHAPITRE II

Analyse des travaux publiés.

Les appareils de physique nucléaire sont les premiers qui aient nécessité l'emploi de faisceaux d'ions évoluant au voisinage d'une ligne courbe. Cette dernière est généralement plane et le dispositif présente une symétrie par rapport à ce plan. Il en résulte des propriétés d'« orthogonalité » (v. chap. VIII) qui simplifient les équations et permettent la séparation mathématique des composantes du mouvement paraxial.

Certains auteurs se sont attachés à l'étude de systèmes particuliers tels que spectrographes de masses ou spectrographes de vitesses utilisés, par exemple, pour l'analyse du spectre énergétique continu des rayons β .

Les principales de ces publications sont citées dans les ouvrages de M. Cotte (1), P. A. Sturrock (2) et W. Glaser (3).

D. Gabor (4) de son côté a étudié les propriétés focalisatrices de systèmes dont l'« axe » est une hélice. Nous retrouverons au chapitre IX ce cas particulier et lui appliquerons les résultats que nous avons obtenus sur les temps de transit. Des systèmes hélicoïdaux destinés à guider des faisceaux de forte intensité seront également envisagés dans ce chapitre.

D'autres publications ont abordé l'étude générale des pinceaux dont l'« axe » est une courbe Γ quelconque. Les auteurs n'imposent pas de propriétés restrictives aux champs. Aucune considération de symétrie ne vient les simplifier.

M. Cotte (1) est le premier à avoir abordé la théorie générale. Il rapporte l'espace à un système de coordonnées triple orthogonal géométriquement lié à la courbe Γ (v. chap. III). Cette dernière constitue l'intersection des surfaces :

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Un point voisin de Γ possède donc deux de ses coordonnées (x et y) qui peuvent être considérées comme des infiniment petits principaux. Le choix des surfaces coordonnées permet d'exprimer l'élément de distance dS qui sépare deux points infiniment voisins au moyen d'une forme quadratique simple, sans termes rectangulaires, dont le seul coefficient variable se calcule facilement au moyen des propriétés intrinsèques de Γ , c'est-à-dire de sa courbure et de sa torsion.

Le potentiel électrique et le potentiel vecteur magnétique sont représentés par des fonctions des coordonnées développées en séries entières par rapport à x et y . Cette méthode permet d'exprimer, sous forme de développement en séries entières de x , y et leurs dérivées par rapport à z , les quantités mécaniques (Hamiltonien ou Maupertuisien) liées à un point matériel en mouvement. On en déduit, par application des principes variationnels, les équations du mouvement. On peut limiter ces dernières aux termes du premier ordre, ce qui fournit les équations des rayons paraxiaux ou pousser plus loin le développement pour aborder l'étude des aberrations. M. Cotte a montré qu'un changement de coordonnées permettait de ramener les équations paraxiales d'un système quelconque à celles, plus simples, d'un système qui ne contient pas de champ magnétique. Il a signalé un certain nombre de cas dans lesquels l'intégration devient plus facile : les principaux correspondent aux systèmes orthogonaux et aux systèmes gaussiques (v. chap. IV et VIII).

Les systèmes orthogonaux constituent une généralisation des systèmes doués de symétrie plane. Les champs y remplissent des conditions permettant la séparation des mouvements paraxiaux. Cela signifie que les deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre qui les décrivent et dans lesquelles les variables x et y interviennent toutes les deux, peuvent s'écrire sous forme de deux équations distinctes ne portant chacune que sur une seule des variables. On peut alors considérer un rayon comme « décomposable » en deux rayons principaux.

Les systèmes gaussiques sont plus particuliers encore : les deux rayons principaux sont décrits par des équations identiques ; ils ont donc le même comportement, ce qui permet la définition du point image d'un point objet donné. Ils constituent, dans l'approximation de

Gauss, une généralisation des systèmes centrés habituels. M. Cotte a étudié en détail la formation des focales et les aberrations des systèmes orthogonaux. Ces dernières sont calculées grâce à une méthode de variation des constantes d'intégration du mouvement paraxial.

Ces travaux ont été repris et complétés par plusieurs auteurs : G. Wendt (5) a étudié la formation des images dans le cas général en se limitant au premier ordre, c'est-à-dire à l'approximation de Gauss. P. A. Sturrock (2) a développé, sous une forme légèrement différente, des calculs analogues. L'emploi systématique du calcul tensoriel supprime les considérations géométriques qui justifient l'emploi du système de coordonnées. Les méthodes et les idées sont identiques à celles des publications antérieures, mais le calcul complet des aberrations est effectué dans le cas général : aberration du deuxième ordre, aberration chromatique du premier ordre que l'on nomme également aberration chromatique transversale et que nous avons appelée « dérive chromatique », aberration chromatique longitudinale.

P. A. Sturrock est le premier qui ait établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit orthogonal ou gaussique.

Dans tous ces travaux, les équations du mouvement sont obtenues à partir d'un Maupertuisien relativiste, sauf toutefois dans le mémoire de G. Wendt. P. A. Sturrock considère même le cas dans lequel les effets relativistes sont assez faibles pour pouvoir être considérés comme des aberrations. Il les traite alors par une méthode de développement en série analogue à celle qu'il emploie pour les autres types d'aberrations.

Il est un type de détérioration des images qui n'est jamais abordé dans les publications précédentes puisqu'elles relèvent toutes de la mécanique classique ou relativiste non ondulatoire, donc de l'optique géométrique : ce sont les effets de la diffraction. La question a été abordée par H. Grümmer (6) qui a cherché à résoudre une équation de Schrödinger approximative valable au voisinage de l'axe courbe et exprimée dans le système orthogonal de coordonnées lié à cet axe. L'obtention de l'équation approchée, qui n'est valable qu'à grande échelle, c'est-à-dire tant que le mouvement s'effectue dans des champs macroscopiques repose sur des considérations semi-classiques inspirées par la méthode utilisée par Glaser et Schiske (7) dans le cas des axes rectilignes.

L. A. MacColl (8) a analysé formellement le cas des rayons paraxiaux : il part du fait que ces derniers sont décrits par un système d'équations différentielles linéaires à deux inconnues et envisage les diverses combinaisons que l'on peut former à partir de quatre systèmes de solutions fondamentales. Il étudie donc la correspondance entre « espace objet » et « espace image » et classe les différents types de comportement possibles : trajectoires joignant deux points, apparition de focales ou de points de focalisation pour les rayons issus d'un point objet donné. Les conditions obtenues pour la réalisation d'un type déterminé de corres-

pondance portent sur les solutions des systèmes différentiels. L. A. MacColl ne remonte pas aux conditions qu'il faut imposer aux champs : c'est en ce sens que son travail est assez formel et éloigné des réalisations physiques possibles.

CHAPITRE III

Équations des mouvements paraxiaux.

Il est commode, dans l'étude des systèmes optiques « d'axe courbe » de rapporter l'espace à un système de référence lié à cet « axe ». Certaines propriétés géométriques prennent ainsi un aspect particulier.

Soit une courbe gauche ne possédant pas de points singuliers. s en désigne l'arc mesuré à partir d'une origine qui peut être choisie arbitrairement.

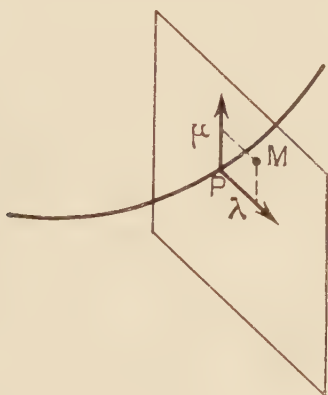


Fig. 1.

Un point M quelconque de l'espace peut être repéré de la façon suivante : on mène par M un plan normal à la courbe. Ce plan la coupe en P. Les coordonnées de M sont : l'abscisse curviligne de P, qui repère le plan normal, et dans ce dernier les coordonnées rectangulaires λ et γ obtenues par projection de PM sur la normale et la binormale à la courbe au point P. Ce repérage n'est biunivoque que s'il est possible, par tout point de l'espace, de mener un plan normal à la courbe et un seul. Ce n'est évidemment pas le cas en général ; toutefois, comme il

n'y a pas de points singuliers sur l'axe curviligne et comme seuls nous intéressent les pinceaux étroits et, par conséquent, les points de l'espace proches de la courbe, le repérage biunivoque se fait sans difficultés en délimitant le voisinage de l'axe optique par la condition que λ et μ soient des quantités petites par rapport aux rayons de courbure et de torsion de ce dernier.

Il est possible d'exprimer, dans le système de coordonnées que l'on vient de définir, la valeur de l'élément de distance dS séparant deux points de l'espace infiniment voisins. Les composantes du tenseur fondamental s'en déduisent; elles sont évidemment fonction des rayons de courbure R et de torsion T de la courbe.

La détermination du mouvement des corpuscules chargés nécessite la connaissance des champs électrique et magnétique qui agissent sur eux. Un champ régnant en un point M est repéré par ses projections sur la tangente, la normale et la binormale à l'axe au point P associé à M par la définition du système de coordonnées. Ces composantes que nous nommons « composantes physiques », car elles se présentent naturellement lors d'une mesure de champ, ne sont pas les composantes liées au système de coordonnées (elles ne coïncident ni avec les composantes covariantes ni avec les composantes contravariantes du vecteur); elles s'en déduisent cependant par des relations linéaires très simples, ce qui permet l'emploi systématique du calcul tensoriel pour l'expression du rotationnel ou de la divergence.

Le champ électrique n'apparaît pas directement: il s'introduit par l'intermédiaire du potentiel électrique, seule grandeur effectivement utilisée dans les calculs.

Le cas du champ magnétique est un peu plus délicat puisque ce dernier est, en réalité, un tenseur de deuxième ordre antisymétrique défini à partir d'un « potentiel vecteur » par l'opérateur « rotationnel ». On sait toutefois que les trois composantes qui suffisent à caractériser un tenseur antisymétrique du deuxième ordre permettent la définition d'un vecteur que nous repérons au moyen de ses « coordonnées physiques ».

Nous ne donnerons pas ici, faute de place, la démonstration des formules du mouvement paraxial: la méthode utilisée est classique. Contentons-nous d'en rappeler l'essentiel.

La connaissance de l'élément de distance, du potentiel électrique, et du potentiel vecteur magnétique suffit à écrire l'expression de l'action maupertuisienne relativiste. On en déduit, par application des formules variationnelles, les deux équations qui définissent la forme des trajectoires, c'est-à-dire les valeurs de λ et μ en fonction de s . Il s'agit évidemment de deux équations différentielles du deuxième ordre. La loi de description d'une trajectoire en fonction du temps s'obtient immédiatement par application du théorème de conservation de l'énergie.

Rappelons que la valeur de l'« indice » n qui figure dans l'intégrale

d'action maupertuisienne (qui prend le nom d'intégrale de Fermat en optique géométrique) est donnée, en mécanique relativiste par :

$$(3.1) \quad n^2 = -e\psi \left(1 - \frac{e\psi}{2mc^2} \right),$$

e désigne ici la charge (positive ou négative) du corpuscule, ψ le potentiel électrique. $e\psi$ est toujours négatif car le potentiel est positif ou négatif suivant que l'on a affaire à des corpuscules de charge négative ou positive ⁽¹⁾. Le champ magnétique joue le même rôle dans le cas relativiste et non relativiste. Il en résulte qu'il suffit pour étudier la forme des trajectoires relativistes, de procéder à une régraduation des équipotentielles électriques et d'appliquer ensuite les lois du mouvement en mécanique classique. Cette circonstance facilite considérablement l'étude des faisceaux de rayons corpusculaires. On doit toutefois noter que la loi du mouvement en fonction du temps, qui s'obtient à partir du théorème de conservation de l'énergie et non à partir de l'intégrale maupertuisienne, ne peut se déduire du mouvement dans le système « regradué » par simple application de ce théorème avec substitution du potentiel corrigé au potentiel vrai.

Les équations générales donnant la forme des trajectoires ne sont pas linéaires. L'approximation de Gauss consiste précisément à les linéariser en supposant que l'on puisse les développer en λ , μ , λ' , μ' (les primes indiquent des dérivations par rapport à s) et en ne conservant que les termes du premier ordre. Il est évidemment nécessaire, pour justifier ce procédé, que les quantités en question soient assez petites, ce que nous allons préciser.

Hypothèses :

1) λ est petit devant R et T ; μ est petit devant T dans toute la région occupée par le pinceau.

2) λ' et μ' sont petits devant l'unité tout le long du pinceau.

3) λ et μ restent assez petits dans toute la région occupée par le pinceau pour que potentiel et champs y soient définis par des développements que l'on puisse limiter à leur premier terme non identiquement nul et pour que, de plus, le potentiel ne varie que faiblement, transversalement à l'axe, par rapport à sa valeur sur ce dernier.

La deuxième et la troisième hypothèse sont celles que l'on formule habituellement dans le cas de systèmes d'axe rectiligne. La faiblesse de λ' et μ' n'est autre que la condition de faible inclinaison des rayons sur l'axe. La nécessité de limiter λ et μ provient de ce que les aberrations de « sphéricité » ne disparaissent que si l'ouverture est assez faible pour que les développements convergent rapidement. C'est ce qui se

(1) L'origine des potentiels est fixée au point d'émission c'est-à-dire au point de vitesse nulle des corpuscules.

traduit en optique, où les surfaces équi-indices jouent le rôle des surfaces équipotentielles, par le fait que ces surfaces doivent pouvoir être représentées, dans la zone utile, par la quadrique, tangente sur l'axe, qui possède les mêmes directions et valeurs des courbures principales. Les rayons de courbure doivent, d'ailleurs rester grands devant la largeur du pinceau. La limitation à de faibles valeurs des variations du potentiel au voisinage de l'axe élimine l'étude des régions de potentiel nul (zones de « réflexion » corpusculaire) ; on sait d'ailleurs que, dans ce cas, λ' et μ' ne peuvent rester petits.

La première hypothèse, automatiquement satisfaite dans le cas d'un axe rectiligne, intervient ici comme limitation supplémentaire à la largeur du pinceau. Elle est liée au fait que la définition biunivoque de l'espace au voisinage de l'axe au moyen des coordonnées s, λ, μ , disparaît si λ et μ atteignent des valeurs de l'ordre des rayons de courbure et de torsion.

Grâce aux hypothèses qui viennent d'être faites, on peut représenter le potentiel électrique et le champ magnétique au voisinage de l'axe par les formules suivantes (on pose $n^2 = -e\varphi$, φ désignant le potentiel électrique « regradué » dans le cas relativiste) :

$$(3.2) \quad \varphi = \alpha(s) + \lambda\beta_1(s) + \mu\beta_2(s) + \lambda^2\gamma_1(s) + \lambda\mu\gamma_2(s) + \mu^2\gamma_3(s)$$

Le champ magnétique H de composantes H_t, H_n, H_b , sur la tangente, la normale et la binormale à l'axe est :

$$(3.3) \quad \begin{cases} H_t = a_t(s) + \lambda b_t(s) + \mu c_t(s) \\ H_n = a_n(s) + \lambda b_n(s) + \mu c_n(s) \\ H_b = a_b(s) + \lambda b_b(s) + \mu c_b(s) \end{cases}$$

Si l'on fait correspondre à chaque grandeur a, b, c , une grandeur $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ définie par :

$$(3.4) \quad \mathcal{A} = \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}} a \quad \mathcal{B} = \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}} b \quad \mathcal{C} = \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}} c$$

les équations des rayons paraxiaux s'écrivent :

$$(3.5) \quad \begin{cases} 0 = 2\lambda\lambda'' + \lambda'\lambda' + \left[\frac{2\alpha}{R^2} - \frac{2\alpha}{T^2} + \frac{\beta_1}{R} + \frac{\beta_1^2}{2\alpha} - 2\gamma_1 + \frac{\mathcal{A}_t}{T} - \mathcal{B}_b \right] \lambda \\ \quad + \left[\frac{\beta_2}{R} + \frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} + \frac{2\alpha T'}{T^2} - \frac{\lambda'}{T} - \gamma_2 - \mathcal{C}_b \right] \mu + \left[\mathcal{A}_t - \frac{\lambda^2}{T} \right] \lambda' \\ 0 = 2\lambda\mu'' + \lambda'\mu' + \left[\frac{\beta_2^2}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{T^2} - 2\gamma_3 + \frac{\mathcal{A}_t}{T} + \mathcal{C}_n \right] \mu \\ \quad + \left[\frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} - \frac{2\alpha T'}{T^2} + \frac{\lambda'}{T} - \gamma_2 + \mathcal{B}_n \right] \lambda - \left[\mathcal{A}_t - \frac{\lambda^2}{T} \right] \lambda' \end{cases}$$

R et T désignent toujours les rayons de courbure et de torsion de la courbe au point d'abscisse curviligne s . Les accents désignent les déri-

vées par rapport à s des fonctions R , T ou α comme celles des fonctions λ et μ de la variable s .

Bien entendu, les véritables équations du mouvement ne se réduisent à leur terme du premier ordre (3.5) que parce que le terme d'ordre zéro disparaît. Cela résulte de ce que l'on suppose que l'axe est une trajectoire possible puisqu'il fait partie du pinceau de corpuscules. $\lambda=0$, $\mu=0$ doivent être solutions des équations rigoureuses. Cette hypothèse impose naturellement certaines relations entre φ et H sur l'axe pour que les forces exercées permettent à ce dernier d'être trajectoire. On les trouve précisément en annulant les termes d'ordre nul dans le développement des équations.

Ces conditions se traduisent évidemment par l'imposition de relations entre les quantités α , β et $\mathcal{A}$ qui ne sont pas indépendantes ⁽¹⁾ :

$$(3.6) \quad \beta_1 = \frac{2\alpha}{R} - \mathcal{A}_b \quad \beta_2 = \mathcal{A}_n.$$

(3.5) a été écrit en tenant compte de (3.6); c'est la raison pour laquelle n'y figurent pas les quantités $\mathcal{A}_b$ et $\mathcal{A}_n$ remplacées par leur valeur en fonction des α et β .

Le champ magnétique H est toujours solénoïdal; on doit annuler sa divergence. L'expression de cette quantité, limitée au premier terme significatif (terme d'ordre zéro) fournit la relation suivante :

$$(3.7) \quad a_i + b_n + c_b - \frac{a_n}{R} = 0.$$

Il est commode de condenser les deux équations (3.5) en introduisant une variable complexe z :

$$(3.8) \quad z = \lambda + i\mu.$$

(3.5) se réduit alors à une seule équation différentielle du deuxième ordre en z . Elle contient des termes en z^* et ses coefficients sont complexes.

Effectuons le changement de variable :

$$(3.9) \quad z = \rho \exp - i \int_0^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_l}{4\alpha} \right) ds = \rho \exp - i\omega$$

l'équation en ρ se simplifie alors considérablement et devient :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' + \left[\frac{\alpha}{R^2} + \frac{\beta_1}{2R} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{4\alpha} + \frac{\mathcal{A}_l^2}{8\alpha} - \gamma_1 - \gamma_3 + \frac{C_n - B_b}{2} \right] \rho \\ &+ \left[\frac{\alpha}{R^2} + \frac{\beta_1}{2R} + \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{4\alpha} + \gamma_3 - \gamma_1 - \frac{B_b + C_n}{2} + i \left(\frac{\beta_2}{2R} + \frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} - \gamma_2 + \frac{B_n - C_b}{2} \right) \right] \\ &\times \rho^* \exp 2i \int_0^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_l}{4\alpha} \right) ds \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Le champ électrique sur l'axe, gradient de φ , dépend en effet des α et β , le champ magnétique sur l'axe uniquement des a (liés aux $\mathcal{A}$ par 3.4).

elle possède la remarquable propriété suivante : tous les coefficients de (3.10) sont réels à l'exception de celui du terme en φ^* (seul terme faisant intervenir le conjugué de φ). Cette propriété est à la base de l'étude des systèmes gaussiques et des systèmes orthogonaux.

λ et μ sont, dans le plan normal à l'axe au point d'abscisse s , les coordonnées cartésiennes du corpuscule par rapport à deux axes rectangulaires définis par la normale et la binormale à la courbe ; le changement de variable (3.9) introduit deux nouvelles coordonnées rectangulaires ξ et η (partie réelle et partie imaginaire de φ) obtenues par rotation de l'angle ω . Elles tournent donc autour du plan osculateur au fur et à mesure du déplacement du corpuscule avec une « vitesse » définie par la torsion et le champ magnétique tangentiel sur l'axe.

CHAPITRE IV

Les systèmes gaussiques.

Les systèmes centrés classiques sont constitués par des optiques de révolution autour d'un axe nécessairement rectiligne. Il en résulte des propriétés de symétrie qui simplifient les équations fondamentales des rayons paraxiaux. En particulier, il y a confusion des systèmes de focales et possibilité de formation d'images. Les systèmes « gaussiques » sont définis par généralisation du cas des systèmes de révolution : les conditions de symétrie (au premier ordre) n'apparaissent plus avec autant de simplicité que dans le cas des axes rectilignes, mais subsistent cependant.

Considérons tout d'abord le cas d'un système purement électrostatique dont l'axe est constitué par une droite D. Son équation fondamentale résulte de (3.10) qui se simplifie, compte tenu de (3.6) et de ce que R et T sont infinis, et devient :

$$(4.1) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' - (\gamma_1 + \gamma_3)\rho + (\gamma_3 - \gamma_1 + i\gamma_2)\rho^* = 0.$$

Les équipotentiellles sont définies par (3.2) : les β étant nuls elles sont normales à l'axe. Elles deviennent de révolution si l'on impose la nullité de γ_2 et l'égalité de γ_1 et γ_3 . Cette condition fait disparaître dans (4.1) le terme en ρ^* . Réciproquement, la disparition de ce terme impose les mêmes relations aux γ . Les surfaces équipotentiellles, percées par l'axe en un ombilic, ont des rayons de courbure principaux égaux et sont équivalentes, pour les propriétés paraxiales, à des surfaces de révolution autour de D.

Lorsqu'il existe un champ magnétique, lui-même de révolution

autour de D et dont les lignes de force sont situées dans les plans passant par D, les formules (3.3) se réduisent évidemment à :

$$(4.2) \quad \begin{cases} H_l = a(s) + \text{termes du deuxième ordre} \\ H_n = \lambda b(s) + \dots & H_b = \mu b(s) + \dots \end{cases}$$

Il résulte de (3.6) que la nullité de $\frac{1}{R}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}_b$ entraîne celle des β . L'équation fondamentale voit encore disparaître son terme en β^* si le potentiel électrique est également de révolution. Cependant, en présence du champ magnétique, il n'y a pas réciprocité comme dans le cas purement électrostatique. La disparition des termes en ρ^* n'entraîne pas que les champs soient (à des termes d'ordre supérieur au premier près) de révolution ; il peut y avoir compensation des dissymétries du champ électrique par celles du champ magnétique : deux relations entre tous les paramètres sont suffisantes.

La disparition du terme en ρ^* réduit l'équation fondamentale à l'état d'équation différentielle du deuxième ordre à *coefficients réels*. Cette propriété est capitale, car c'est elle qui entraîne la confusion des systèmes de focales et les propriétés de stigmatisme. Les variables ξ et η (dédites de λ et μ par rotation autour de l'axe) sont l'une et l'autre solution de l'équation en ρ . Si un rayon issu de l'axe en un point A le rencontre à nouveau en B, il en est de même de tous les rayons issus de A. La nécessité de la disparition du terme en ρ^* pour qu'il soit possible de réduire le système à deux équations du deuxième ordre indépendantes et identiques sera démontrée ultérieurement.

La présence des termes en ρ^* est caractéristique des phénomènes d'astigmatisme. Ils prennent, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de cette étude, l'allure de phénomène du premier ordre puisqu'ils figurent dans l'équation générale des pinceaux paraxiaux à condition que l'on ait choisi convenablement l'axe Γ du système. C'est ce qui permet une étude de l'astigmatisme des pinceaux fortement inclinés sur l'axe d'un système centré ou celle des faisceaux de canons à électrons en choisissant pour axe Γ , la trajectoire de leur corpuscule moyen.

La généralisation au cas des systèmes d'axe courbe est maintenant évidente : on appelle, par définition, système gaussique un système dans lequel le terme en ρ^* disparaît dans l'équation fondamentale. Il suffit donc de lui imposer deux conditions, tout comme dans le cas des systèmes d'axe rectiligne.

Envisageons d'abord le cas particulier des systèmes purement électrostatiques ; la nullité du champ magnétique impose, d'après (3.6) :

$$(4.3) \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = \frac{2x}{R}$$

les termes en ρ^* disparaissent dans (3.10) si l'on a :

$$(4.4) \quad \frac{3x}{R^2} + \gamma_3 = \gamma_1 \quad \gamma_2 = 0$$

ce qui réduit (3.10) à :

$$(4.5) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' - 2\gamma_3\rho = 0$$

le potentiel électrique est défini par :

$$(4.6) \quad \varphi = \alpha + \frac{2x\lambda}{R} + \frac{3x\lambda^2}{R^2} + \gamma_3(\lambda^2 + \mu^2) + \dots$$

On constate que le système gaussique possède exactement les mêmes propriétés de focalisation des rayons paraxiaux que le *système de révolution* défini par les fonctions x et $\gamma = \gamma_3$. x représente la distribution du potentiel sur l'axe. γ définit la courbure des équipotentielles sur l'axe D. On reste libre de leur choix pour imposer les conditions de convergence que l'on désire aux solutions de (4.5). Au voisinage de l'axe courbe, le potentiel est défini par (4.6); on peut le considérer comme la superposition du potentiel :

$$(4.7) \quad \varphi_1 = \alpha \left(1 + \frac{2\lambda}{R} + \frac{3\lambda^2}{R^2} \right)$$

et du potentiel :

$$(4.8) \quad \varphi_2 = \gamma_3(\lambda^2 + \mu^2).$$

Le potentiel φ_1 que nous pouvons appeler le « potentiel naturel lié à la courbure » impose l'angle des équipotentielles avec l'axe. Il est uniquement défini, pour une courbe donnée, par la distribution x du potentiel sur elle. Il impose de plus une certaine courbure aux surfaces équipotentielles. Le potentiel φ_2 , qui possède des propriétés symétriques en λ et μ (analogues à celles d'un potentiel de révolution autour d'une droite) correspond à l'imposition d'une courbure supplémentaire (la même pour toutes les directions) aux équipotentielles. Ce supplément de courbure est précisément à l'origine des propriétés focalisatrices : on peut l'imposer librement, mais le fait que le potentiel est harmonique réduit cette liberté. Dans le cas relativiste, on doit tenir compte de ce que φ représente le potentiel « regradué » alors que c'est le potentiel vrai qui est harmonique.

Dans le cas général où il existe un champ magnétique, deux conditions seulement sont à imposer au système pour qu'il soit gaussique. Comme dans le cas des axes rectilignes, cela n'entraîne pas, pour les champs, des propriétés de symétrie analogues à celles que nous avons décrites ci-dessus ; les dissymétries de l'un d'entre eux peuvent être compensées par celles de l'autre.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait un système gaussique s'obtiennent en annulant le coefficient de ρ^* dans (3.10); si l'on y joint les relations (3.6) et (3.7) qui sont nécessaires, on obtient 5 relations entre les 15 fonctions, α , β , γ , $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, qui déterminent les champs et le potentiel; il reste encore un assez large arbitraire.

On doit encore tenir compte de ce que les champs vérifient en tout point du pinceau de corpuscules :

$$(4.9) \quad \text{rot } \bar{H} = 4\pi\mu_0 j \quad \text{div } \bar{E} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0}.$$

j et σ désignent la densité de courant et la densité de charge au point M où se trouve situé le corpuscule ; μ_0 et ϵ_0 sont la perméabilité et le pouvoir inducteur spécifique du vide. Ces équations soulèvent le problème difficile de la charge d'espace.

j et σ dépendent du mouvement des corpuscules. Ce sont des fonctionnelles des solutions des équations du mouvement. De ce fait, ils dépendent également des conditions initiales imposées aux rayons. La formulation explicite du problème rigoureux et, à plus forte raison, sa solution, deviennent inextricables.

Dans le cas simple où l'on peut négliger les champs produits par les corpuscules devant ceux qui sont imposés au système, ce qui suppose évidemment que j et σ soient faibles partout (pinceaux transportant très peu de courant, tensions pas trop faibles pour que les vitesses ne soient pas trop réduites) les conditions se réduisent à :

$$(4.10) \quad \text{rot } \bar{H} = 0 \quad \text{div } \bar{E} = 0.$$

Si l'on se reporte aux formules (3.2) et (3.3), on peut exprimer ces conditions en y substituant les développements de H et E et en les limitant au premier terme. On obtient ainsi dans le cas non relativiste où le potentiel « regradué » se confond avec le potentiel vrai :

$$(4.11) \quad c_n = b_b \quad b_t + \frac{ab}{T} - \frac{ab}{R} = a'_n \quad c_t - \frac{a_n}{T} = a'_n.$$

$$(4.12) \quad \alpha'' + 2\gamma_1 + 2\gamma_3 - \frac{\beta_1}{R} = 0.$$

Ces équations jointes aux équations déjà obtenues fournissent 9 relations entre les 15 fonctions qui déterminent les champs et le potentiel. Six seulement restent arbitraires. On peut par exemple choisir le potentiel électrique sur l'axe courbe et en son voisinage (sous réserve qu'il soit harmonique) ; le champ magnétique est alors parfaitement déterminé au voisinage de l'axe à partir de la valeur de sa composante tangentielle sur ce dernier.

Si l'on s'impose les conditions (4.11) et (4.12), le coefficient de ρ devient :

$$(4.13) \quad \frac{\mathcal{A}_t^2}{8\alpha} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{4\alpha} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{2}.$$

Il se réduit, lorsqu'il n'y a pas de champ magnétique, à :

$$(4.14) \quad \frac{\alpha''}{2} + \frac{2\alpha}{R^2}$$

ainsi se manifeste la restriction dont nous avons parlé antérieurement. Le fait que le potentiel soit harmonique réduit la liberté d'imposer une courbure supplémentaire (caractérisée par γ) aux équipotentielles en plus de leur courbure naturelle.

On doit avoir, en effet :

$$(4.15) \quad \gamma = -\frac{z''}{4} - \frac{z}{R^2}$$

et les propriétés de focalisation sont imposées par la distribution $z(s)$ du potentiel sur l'axe, tout comme dans le cas d'un axe rectiligne. La présence du terme en z/R^2 montre cependant que pour une même distribution de potentiel sur une droite et sur une courbe quelconque, on obtiendra des propriétés différentes, fonction de la courbure.

La relation classique de Lagrange reste valable dans le cas d'un « axe » l'quelconque.

Considérons, en effet, deux rayons, c'est-à-dire deux solutions φ_a et φ_b de l'équation fondamentale. La quantité $\sqrt{x(\varphi_a \varphi_b - \varphi_b \varphi_a)}$ est indépendante de s comme on le vérifie immédiatement en dérivant. Choisissons pour φ_a la fonction $\varphi_1(s)$ qui s'annule pour $s = s_0$ et qui est telle que $\varphi_1'(s_0) = l_1$, pente (supposée petite) d'un rayon issu du point de l' d'abscisse s_0 . Si l'on prend pour φ_b l'abscisse d'un point B image de A, φ_1 doit s'annuler lorsque s prend la valeur s_1 et, par conséquent :

$$(4.16) \quad \sqrt{x(s_1)} l_1 \rho_b(s_1) = \sqrt{x(s_0)} l_0 \rho_b(s_0).$$

l_1 désignant la pente $\varphi_1'(s_1)$ du rayon passant par B et issu de A avec la pente l_0 . Telle est, sous sa forme générale, la relation de Lagrange. φ_b désigne une solution quelconque de l'équation fondamentale.

En utilisant la variable z au lieu de la variable φ , on obtiendrait une formule analogue, mais complexe, puisque les coefficients de l'équation en sont imaginaires. Dans le système λ, μ , il y a une rotation donnée par la différence des arguments : on retrouve la rotation déjà introduite lors du passage de z à φ . Les modules donnent le grandissement sous forme de la relation de Lagrange habituelle puisque $|z|$ égal d'ailleurs à $|\varphi|$ représente précisément la longueur d'un petit objet normal à l'axe, dans le plan objet comme dans le plan image.

Il peut arriver que l'on cherche à localiser les champs produisant la focalisation dans des régions plus ou moins étroites qui constituent les « lentilles » du système optique. Il est alors possible de définir, en dehors de ces régions, un « espace objet » et un « espace image » dans lesquels le potentiel électrique est constant et le champ magnétique nul. L'axe y devient rectiligne. La forme linéaire de l'équation fonda-

mentale des systèmes gaussiques justifie le « principe de superposition ».

On peut définir sans difficultés de la même manière que pour un système centré les notions de foyers et points principaux et opérer compte tenu de la rotation des images, les constructions géométriques à la manière habituelle.

CHAPITRE V

Temps de transit.

Les équations fondamentales ont permis d'étudier les propriétés géométriques du premier ordre de petitesse des trajectoires définies par les fonctions $\lambda(s)$, $\mu(s)$. La loi du mouvement $s(t)$ ou, inversement, le temps de transit $t(s)$ possèdent eux aussi des propriétés du premier ordre, qui jouent un rôle essentiel dans certains des problèmes d'application passés en revue au chapitre premier : dans un tube à retard, le temps de transit doit être grand, mais ses variations doivent rester faibles d'un corpuscule à l'autre car elles définissent la bande passante maximum des signaux que l'on peut espérer retarder sans les déformer. Dans un klystron la modulation de vitesse joue un rôle essentiel et il faut que les corpuscules issus au même instant du résonateur y pénétrant également au même instant quelles que soient les trajectoires paraxiales qu'ils ont parcourues ; il faut de plus que la modulation de vitesse se transforme au cours du transit en modulation de densité. Cela pose le problème du rendement de cette conversion, c'est-à-dire de la façon dont le paquet d'électrons formé s'approche plus ou moins du paquet idéal.

Tant qu'il s'agissait des équations des trajectoires, les phénomènes relativistes ne jouaient pas un rôle fondamental : il suffisait d'introduire le potentiel « regradué ». Il semble indiqué de le conserver dans la suite du développement. Le potentiel réel se calcule par son intermédiaire. Ils se confondent, naturellement, quand on néglige les effets relativistes.

La loi de mouvement le long d'une trajectoire, c'est-à-dire le temps de transit se déduit du théorème de conservation de l'énergie qui donne immédiatement la vitesse dS/dt en fonction du potentiel électrique vrai ψ . Comme on l'a déjà signalé, il ne suffit pas, pour obtenir une équation valable dans le cas relativiste, de substituer dans l'équation non relativiste de conservation le potentiel corrigé $\bar{\psi}$ au potentiel ψ ; il

faut exprimer ψ en fonction de z et le porter dans l'équation de conservation de l'énergie (écrite de façon relativiste), ce qui donne :

$$(5.1) \quad \frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{\frac{2e\varphi}{m}}{1 - \frac{2e\varphi}{mc^2}}}$$

ce n'est que si $c \rightarrow \infty$ que (5.1) prend la forme classique du théorème de conservation non relativiste. φ se confond d'ailleurs dans ce cas avec ψ .

Si l'on exprime l'élément de longueur dS de la trajectoire au moyen des variables λ, μ, s , on obtient la valeur différentielle dt du temps de transit en fonction de ces quantités puisque φ en est également fonction. En développant par rapport aux infiniment petits $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, comme on l'a fait pour les équations des trajectoires, on obtient en se limitant au premier ordre :

$$(5.2) \quad \frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \left(1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{\beta_1\lambda + \beta_2\mu}{2\alpha \left(1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} \right)} - \frac{\lambda}{R} \right)$$

les termes d'ordre zéro ne disparaissent évidemment pas car si λ et μ sont nuls, on obtient la loi de description, en fonction du temps, de l'axe qui est, comme on le sait, une trajectoire possible. La différence τ des temps de transit entre un corpuscule quelconque et le corpuscule moyen qui décrit l'axe est donnée par :

$$(5.3) \quad \frac{d\tau}{ds} = -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \left(\frac{\beta_1\lambda + \beta_2\mu}{2\alpha \sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2}}} + \sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2}} \frac{\lambda}{R} \right)$$

c'est-à-dire par les termes infiniment petits figurant dans le développement de dt/ds .

On reconnaît dans cette formule les deux causes de dispersion des temps de transit : le premier terme de la parenthèse provient de la variation du potentiel, le second de l'allongement de la trajectoire.

Dans un système purement électrostatique, les conditions (4.3) réduisent (5.3) à la forme :

$$(5.4) \quad \frac{d\tau}{ds} = -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \frac{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2}}{\sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2}}} \frac{2\lambda}{R}$$

On constate que si R est infini, c'est-à-dire si l'axe est linéaire, les dispersions de temps de transit s'annulent ou plus exactement deviennent des infiniment petits du deuxième ordre. C'est là une propriété importante et assez évidente qui disparaît lorsque l'axe devient courbe.

Nous retrouvons là un aspect de la méthode générale qui permet d'étudier les aberrations d'un système en choisissant l'axe de façon à changer leur ordre de grandeur.

Pour réaliser l'isochronisme (au deuxième ordre près) en tout point de la trajectoire, il faut annuler identiquement les coefficients de λ et μ dans (5.3). Dans le cas d'un système gaussique, ces conditions jointes à celles qui ont déjà été obtenues montrent que : la répartition du potentiel ainsi que celle du champ magnétique tangentiel sur l'axe courbe restent arbitraires ainsi que les propriétés de courbure des équipotentielles. Ces dernières déterminent le champ magnétique transversal sur l'axe ainsi que les champs en son voisinage. Elles déterminent en particulier l'angle des équipotentielles et de l'axe et les conditions de focalisation.

Dans la plupart des cas l'isochronisme n'a pas besoin d'être réalisé en tout point des trajectoires. Il n'a d'importance qu'entre deux points s_0 et s_1 de l'« axe » Γ , ou plus exactement, entre les deux éléments de plans normaux à Γ en s_0 , s_1 et voisins de Γ : ce seront par exemple les cavités d'un klystron (qui peuvent, en fait, être une seule et unique cavité), le « cross over » du canon d'un tube à retard et son anode ... s_0 et s_1 sont en général images l'un de l'autre car ils constituent des pupilles du système que l'on a évidemment intérêt à focaliser l'une sur l'autre (on peut aussi dire que les rayons sont pratiquement issus de l'axe en $s = s_0$, divergent, puis convergent pratiquement vers un trou centré sur l'axe en $s = s_1$) ; le système doit alors être un système gaussique.

La condition pour que l'isochronisme soit réalisé au deuxième ordre près entre s_0 et s_1 s'écrit dans ce cas :

$$(5.5) \quad \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R}} \left(\frac{\beta_1 \lambda + \beta_2 \mu}{2\alpha \sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R}} + \sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R} \right) ds = 0$$

cette relation doit être vérifiée quel que soit le rayon du pinceau ; on peut l'écrire en recourant à la variable ρ et en désignant par $\mathcal{R}(x)$ la partie réelle de la quantité x :

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{R} \int_{s_0}^{s_1} \left(\sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R} + \frac{\beta_1}{2\alpha \sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R}} - \frac{i\beta_2}{2\alpha \sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R}} \right) \\ & e^{-i \int_0^{s_1} \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_t}{4\alpha} \right) ds} \times \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{2e\alpha}{mc^2} R}} ds = 0, \end{aligned} \right.$$

ρ est ici une solution quelconque de l'équation (5.13).

Dans le cas des systèmes gaussiques, il est commode d'introduire les deux solutions définies par les conditions initiales :

$$(5.7) \quad \rho_1(s_0) = 0, \quad \rho_1'(s_0) = 1, \quad \rho_2(s_0) = 1, \quad \rho_2'(s_0) = 0.$$

Il suffit alors d'écrire que la quantité (5.6) est nulle quand on y remplace ρ par ρ_1 , $i\rho_1$, ρ_2 , $i\rho_2$.

La substitution de $i\rho_1$ à ρ_1 ou de $i\rho_2$ à ρ_2 échange les parties réelles et imaginaires de l'expression figurant sous le signe $\mathcal{R}$. Il revient donc au même d'écrire que l'expression figurant sous le signe $\mathcal{R}$ est nulle toute entière quand on y substitue ρ_1 et ρ_2 . Il en résulte quatre conditions, formulées sous une forme implicite assez particulière, imposées aux champs et au potentiel puisque ρ_1 et ρ_2 sont, par l'intermédiaire de l'équation fondamentale et des conditions (5.7), définies par ces derniers.

Dans certains problèmes on peut admettre que les rayons sont pratiquement issus d'un point de l'axe pour converger vers un autre point de cet axe, image du premier. Il suffit alors pour réaliser l'isochronisme au deuxième ordre près entre ces deux points que la condition soit réalisée pour ρ_1 seulement, et pas nécessairement pour ρ_2 .

La forme assez difficile de la condition d'isochronisme reste utilisable dans l'étude d'un système pratique ; il peut arriver que certaines considérations de symétrie fournissent des compensations quasi évidentes de champs ou de courbures le long des trajectoires permettant de la satisfaire.

Dans le cas général, il reste toujours possible de déterminer la forme optimum des champs par approximations successives en résolvant l'équation en ρ pour chaque distribution particulière, ce qui fournit ρ_1 et ρ_2 puis en calculant les intégrales qui figurent dans (5.6). Il s'agit là d'un travail que l'existence des machines à calculer modernes — qui pour chacune des approximations successives travaillent avec le même programme — permet de réaliser sans grandes difficultés.

On doit, de plus, remarquer que lorsque l'on a affaire à une courbe sans champ magnétique tangentiel sur elle ou encore lorsque la torsion est précisément le résultat de la seule action de ce champ magnétique, c'est-à-dire lorsque :

$$(5.8) \quad \frac{1}{T} = \frac{\mathcal{A}_t}{4x}$$

la condition d'isochronisme prend, du fait que ρ_1 et ρ_2 sont réels, la forme :

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & \int_s^{s_1} \left(\sqrt{1 - \frac{2ex}{mc^2}} \frac{1}{R} + \frac{\rho_1}{2x \sqrt{1 - \frac{2ex}{mc^2}}} \right) \frac{\rho}{\sqrt{1 - ex}} ds = 0 \\ & \int_{s_0}^{s_1} \frac{\rho_1}{2x \sqrt{1 - \frac{2ex}{mc^2}}} \frac{\rho}{\sqrt{1 - ex}} ds = 0 \end{aligned}$$

dans laquelle ρ doit être remplacé par ρ_1 et ρ_2 ou seulement par ρ_1 dans certains cas.

Dans le cas non relativiste, les radicaux disparaissent dans (5.9) et α , β_1 , β_2 sont relatifs au potentiel électrique vrai. On obtient alors la forme sous laquelle on pourra, le plus fréquemment, être amené à exprimer l'isochronisme. Il ne faut, en effet, pas perdre de vue que l'annulation des termes du premier ordre laisse subsister un anisochronisme du deuxième ordre qui constitue, en quelque sorte, une aberration sur les temps de transit. Les corrections de relativité intervenant dans les équations du premier ordre sont négligeables devant elle, sauf pour des énergies extrêmement élevées telles qu'on ne peut guère en rencontrer que dans les accélérateurs de particules.

CHAPITRE VI

Achromatisme.

Les équations générales du mouvement ont été établies en supposant qu'il n'y avait pas de dispersion des énergies des corpuscules. L'équation de l'énergie a été écrite sans constante arbitraire d'intégration. Les vitesses s'annulent si le potentiel φ s'annule. Tous les corpuscules rencontrant une même équipotentielle y possèdent une vitesse de même module, seules les directions (qui correspondent aux valeurs de λ' et μ') peuvent être différentes.

Pour tenir compte de l'existence d'une dispersion énergétique, il suffit d'ajouter à φ une constante arbitraire θ dans l'équation de conservation de l'énergie. $W = -e\theta$ représente l'énergie excédentaire du corpuscule par rapport au corpuscule moyen. θ peut donc, en principe, avoir l'un ou l'autre signe.

Le principe de moindre action maupertuisienne reste évidemment valable à condition de remplacer φ par $\varphi + \theta$. Cette substitution modifie φ d'une façon différente. Cette quantité devient en effet :

$$(6.1) \quad \varphi - \frac{\theta}{2mc^2} \theta^2 + \theta \sqrt{1 - \frac{2e\varphi}{mc^2}}.$$

Il ne suffit donc pas d'ajouter à φ une constante, même éventuellement corrigée. La variation du potentiel « regradué » apparaît comme plus compliquée que celle du potentiel vrai.

Comme celle des temps de transit, effectuée au chapitre précédent, l'étude de l'achromatisme conduit à des conditions de chromatisme qui laissent subsister des défauts du deuxième ordre lorsqu'on fait disparaître ceux du premier ordre. Ces défauts sont, en général plus importants que les corrections de relativité, ce qui nous conduit, pour éviter le maniement de formules inutilement compliquées à supposer,

dans la suite de ce chapitre, que l'on se trouve dans le cas de la mécanique classique. Le retour au cas relativiste, qui se calquerait sur les développements qui suivent, ne soulève d'ailleurs aucune difficulté fondamentale. Les potentiels ψ et φ sont donc confondus et remplacés par $\varphi + \theta$. Nous conservons la notation en φ du potentiel.

Les relations que doivent nécessairement satisfaire champs et potentiel pour que l'axe soit une trajectoire possible, ne peuvent demeurer satisfaites, en général, quand on y remplace φ par $\varphi + \theta$. Un corpuscule partant tangentiellement d'un point donné de l'axe ne peut y demeurer (du fait de la courbure et des forces magnétiques), si son énergie est différente de celle du corpuscule moyen. Il n'y a d'exception que dans le cas d'un système rectiligne sans champ magnétique transversal sur l'axe.

Les rayons décrits par des corpuscules issus d'un point A de Γ avec la même énergie initiale (correspondant à une valeur donnée de θ) forment un pinceau qui se groupe autour d'une trajectoire moyenne Γ' , qui est celle du corpuscule qui part de A tangentiellement à l'axe. Γ' est la solution des équations du mouvement définies par les conditions initiales suivantes en A d'abscisse s_0 :

$$(6.2) \quad \lambda(s_0) = 0 \quad \mu(s_0) = 0 \quad \lambda'(s_0) = 0 \quad \mu'(s_0) = 0.$$

Pour que les conditions d'approximation gardent un sens, il faut que Γ' soit une courbe voisine de Γ , ce qui implique que θ soit une quantité petite ; les hypothèses du chapitre III seront donc complétées par :

La dispersion θ des énergies initiales exprimées en unité de potentiel reste petite devant la valeur α de ce potentiel en tout point occupé par les pinceaux de rayons.

La trajectoire Γ' s'écarte de Γ d'une distance du premier ordre par rapport à $\theta \alpha$. On appelle habituellement aberrations les quantités du deuxième ordre par rapport aux infiniment petits principaux. Les aberrations géométriques sont les écarts des valeurs vraies de λ et μ par rapport à celles que donnent l'approximation de Gauss. Elles sont du deuxième ordre par rapport aux infiniment petits λ , μ , λ' , μ' . Les aberrations chromatiques, dans le cas habituel des systèmes centrés d'axe rectiligne sans champ magnétique transversal sur l'axe, sont des termes du deuxième ordre en $\theta \alpha$ parce que, dans ce cas, l'axe reste une trajectoire possible quel que soit θ . Dans le cas général d'un axe formé d'une courbe quelconque, un écart du premier ordre entre Γ et Γ' apparaît : ce n'est plus une aberration au sens propre du terme, nous lui réserverons le nom de « dérive chromatique ».

Comme la présence des termes en φ' dans l'équation fondamentale (qui entraîne la disparition du stigmatisme), comme le terme du premier ordre de la dispersion des temps de transit, la dérive chromatique est un phénomène du premier ordre qui disparaît dans les systèmes

habituels d'axe rectiligne. Tous ces effets permettent, par un choix convenable de l'axe Γ qui suit de plus près la trajectoire moyenne du pinceau de corpuscules, de traiter, au premier ordre près, des effets qui apparaissent au deuxième ordre dans un système habituel (faisceaux fortement inclinés sur l'axe par exemple) ainsi que nous l'avons envisagé dans notre introduction.

Les équations des trajectoires peuvent être développées au premier ordre par rapport à l'ensemble des infiniment petits principaux, $\lambda, \mu, \lambda', \mu', \theta$, ce qui, compte tenu de la disparition des termes d'ordre zéro due au fait que les équations sont satisfaites si tous les infiniment petits sont annulés, donne :

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\lambda'' + \alpha'\lambda' + \left(\frac{2\alpha}{R^2} - \frac{2\alpha}{T^2} + \frac{\beta_1}{R} + \frac{\beta_1^2}{2\alpha} - 2\gamma_1 + \frac{\mathcal{A}_t}{T} - \mathcal{B}_b \right) \lambda + \left(\mathcal{A}_t - \frac{4\alpha}{T} \right) \mu' \\ \quad + \left(\frac{\beta_2}{R} + \frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} + \frac{2\alpha T'}{T^2} - \frac{\alpha'}{T} - \gamma_2 - \mathcal{C}_b \right) \mu + \left(\frac{1}{R} + \frac{\beta_1}{2\alpha} \right) \theta = 0 \\ 2\alpha\mu'' + \alpha'\mu' + \left(\frac{\beta_1^2}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{T^2} - 2\gamma_3 + \frac{\mathcal{A}_t}{T} + \mathcal{C}_n \right) \mu - \left(\mathcal{A}_t - \frac{4\alpha}{T} \right) \lambda' \\ \quad + \left(\frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} - \frac{2\alpha T'}{T^2} + \frac{\alpha'}{T} - \gamma_2 + \mathcal{B}_n \right) \lambda + \frac{\beta_2}{2\alpha} \theta = 0. \end{array} \right.$$

Ces deux équations précisent les résultats que nous venons d'obtenir : dans le cas de l'approximation de Gauss, c'est-à-dire si l'on néglige les quantités du deuxième ordre, les solutions $\lambda(s), \mu(s)$ qui décrivent les trajectoires sont celles de (6.3). θ est un nombre, infiniment petit, donné, au même titre que les valeurs initiales de λ, μ, λ' et μ' . L'ensemble de ces nombres indique les valeurs de la position et de la vitesse initiales.

La solution générale de ce système est évidemment obtenue en ajoutant la solution générale du système sans second membre, qui n'est autre que le système fondamental, à une solution particulière. Prenons pour cette solution particulière celle qui correspond à Γ' , c'est-à-dire celle qui correspond à un rayon issu d'un point d'abscisse s_0 de l'axe tangentiellement à ce dernier. On constate que la solution générale de (6.3) possède, par rapport à Γ' , les propriétés que possédaient les solutions de (3.10) par rapport à Γ : tous les rayons de même énergie initiale définissent des images dans les mêmes conditions, mais ces images ne sont pas superposées les unes aux autres lorsque θ prend des valeurs différentes. Elles se translatent, normalement à Γ' d'une quantité qui définit précisément la « dérive chromatique ». Il en résulte un brouillage si l'on ne prend pas la précaution d'annuler cette dérive au point s_1 image du point objet s_0 . L'annulation de la « dérive chromatique » superpose les images correspondant aux différentes énergies initiales. Le brouillage n'est plus dû alors qu'aux termes du deuxième ordre par rapport à l'ensemble des infiniment petits principaux.

Dans le cas des systèmes d'axe rectiligne sans champ magnétique

transversal, qui renferme presque tous les types habituels de transport d'images, la dérive chromatique est nulle : il n'y a pas de brouillage au premier ordre, mais seulement des aberrations du deuxième ordre.

Si l'on introduit comme précédemment la variable ρ , les équations (6.3) deviennent, compte tenu de la nullité de la divergence du champ magnétique :

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' + \left(\frac{\alpha}{R^2} + \frac{\beta_1}{2R} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{4\alpha} + \frac{\mathcal{A}_1^2}{8\alpha} - \gamma_1 - \gamma_3 + \frac{C_n - \mathcal{B}_b}{2} \right) \rho \\ + e^{2i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_1}{4\alpha} \right) ds} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{R^2} + \frac{\beta_1}{2R} + \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{4\alpha} + \gamma_3 - \gamma_1 - \frac{\mathcal{B}_e + C_n}{2} \right) \rho^* \right. \\ \left. + i \left(\frac{\beta_2}{2R} + \frac{\beta_1\beta_2}{2\alpha} - \gamma_2 + \frac{\mathcal{B}_n - C_b}{2} \right) \right] \rho^* \\ + e^{i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_1}{4\alpha} \right) ds} \theta \left(\frac{1}{R} + \frac{\beta_1}{2\alpha} - i \frac{\beta_2}{2\alpha} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut en obtenir la solution particulière qui définit l' à partir des deux solutions fondamentales ρ_1 et ρ_2 de l'équation sans second membre. Sans effectuer le calcul dans le cas général, nous le ferons dans celui des « systèmes gaussiques », qui est celui qui offre le plus d'intérêt du point de vue des possibilités de focalisation.

Supposons donc que le coefficient de ρ^* soit nul (et éventuellement que soient vérifiées les conditions (4.11) et (4.12) si on néglige les effets de charge d'espace), l'équation (6.4) se simplifie et devient :

$$(6.5) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' + f\rho + \theta \left(\frac{1}{R} + \frac{\beta_1}{2\alpha} + i \frac{\beta_2}{2\alpha} \right) \exp i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_1}{4\alpha} \right) ds = 0.$$

f désigne ici le coefficient de ρ dans l'équation fondamentale.

Les fonctions ρ_1 et ρ_2 introduites au chapitre V sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation fondamentale déterminées par les conditions initiales (5.7).

Ces fonctions permettent d'exprimer la solution particulière ρ_0 de (6.5) qui correspond à l', c'est-à-dire qui est définie par les conditions initiales :

$$(6.6) \quad \rho_0(s_0) = 0, \quad \rho'_0(s_0) = 0$$

on a en effet :

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_0 = - \frac{\theta \rho_1(s_0)}{2} \int_{s_0}^s \frac{\rho_2(s)}{\alpha(s_0)\alpha(s)} \left(\frac{1}{R(s)} + \frac{\beta_1(s) + i\beta_2(s)}{2\alpha(s)} \right) e^{i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_1}{4\alpha} \right) ds} ds \\ + \frac{\theta \rho_2(s_0)}{2} \int_{s_0}^s \frac{\rho_1(s)}{\alpha(s_0)\alpha(s)} \left(\frac{1}{R(s)} + \frac{\beta_1(s) + i\beta_2(s)}{2\alpha(s)} \right) e^{i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_1}{4\alpha} \right) ds} ds. \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne la valeur de la « dérive chromatique » en un point quelconque s . En un point s_1 , image de s_0 , on a par définition même de l'image

$$(6.8) \quad \rho_1(s_1) = 0$$

par suite, en un point B d'abscisse $s = s_1$, image de A d'abscisse $s = s_0$, la dérive chromatique, qui définit la translation de l'image produite par la variation θ du potentiel initial, vaut :

$$(6.9) \quad \frac{\theta \rho_2(s_1)}{2} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\rho_1(s)}{\sqrt{\alpha(s_0)\alpha(s)}} \left(\frac{1}{R(s)} + \frac{\beta_1(s) + i\beta_2(s)}{2\tau(s)} \right) e^{i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{R} - \frac{\beta_1}{\alpha} \right) ds} ds.$$

En comparant à (5.6) réduite au cas non relativiste et en prenant l'imaginaire conjugué (ρ_1 est réel), on constate que la dispersion des temps de transit des électrons issus de l'axe (qui correspond à la substitution de ρ_1 à ρ dans (5.6)) et la « dérive chromatique » sont étroitement liées. Faire disparaître la « dérive chromatique » entraîne du même coup l'égalité (au deuxième ordre près) des temps de transit des électrons issus du point $s = s_0$ de l'axe sans dispersion de leur énergie initiale, c'est-à-dire pour lesquels θ est nul. La réciproque est également vraie.

Cette proposition peut être importante dans les systèmes pour lesquels des corpuscules, pratiquement issus d'un point de l'« axe » sont focalisés sur un autre point de cet « axe » qui doit être le même lorsque θ varie. Il faut supprimer la dérive chromatique, ce qui entraîne l'isochronisme des trajectoires correspondant à $\theta = 0$: ce cas peut se présenter dans les systèmes retardateurs ou les klystrons.

La suppression de la « dérive chromatique » impose aux champs des conditions implicites identiques à celles que nous avons discutées au chapitre V. Les remarques faites à cet endroit sur la simplification possible de l'expression de la condition, sa satisfaction par des considérations de symétrie par des approximations successives au moyen de calculs numériques, rapidement effectués par une machine à calculer, restent donc valables.

L'équation qui définit le temps de transit s'obtient sous forme non relativiste et en remplaçant ψ par $\varphi + \theta$. Développée jusqu'au premier ordre par rapport à λ , μ , λ' , μ' , θ , cette équation devient :

$$(6.10) \quad \frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \left(1 - \frac{\theta}{2\alpha} - \frac{\beta_1\lambda + \beta_2\mu}{2\alpha} - \frac{\lambda}{R} \right)$$

la dispersion du temps de transit τ , c'est-à-dire la différence entre le temps t et celui que met le corpuscule moyen (celui qui décrit l'axe correspondant à $\theta = 0$ pour décrire sa trajectoire, vaut donc :

$$(6.11) \quad \frac{d\tau}{ds} = -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \left(\frac{\theta}{2\alpha} + \frac{\lambda}{R} + \frac{\beta_1\lambda + \beta_2\mu}{2\alpha} \right)$$

qui s'écrit également, en introduisant la variable φ :

$$(6.12) \quad \frac{d\tau}{ds} = -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \left[\frac{\theta}{2\alpha} + \Re\left(\frac{1}{R} + \frac{\beta_1}{2\alpha} - i\frac{\beta_2}{2\alpha}\right) \varphi_0 e^{-i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_t}{4\alpha}\right) ds} \right]$$

mais φ est donnée par la solution générale de (6.5) qui s'écrit évidemment en introduisant la fonction φ_0 et les fonctions φ_1 et φ_2 :

$$(6.13) \quad \varphi = \varphi_0 + l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2$$

l_1 et l_2 sont deux constantes arbitraires complexes définies par la position initiale et l'inclinaison initiale du rayon. La présence de la quantité θ ajoute donc, à la dispersion du temps de transit, par rapport au corpuscule moyen, qui existe en l'absence de dispersion des énergies initiales et au deuxième ordre près, la variation :

$$(6.14) \quad -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \left[\frac{\theta}{2\alpha} + \Re\left(\frac{1}{R} + \frac{\beta_1}{2\alpha} - i\frac{\beta_2}{2\alpha}\right) \varphi_0 e^{-i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_t}{4\alpha}\right) ds} \right]$$

cette quantité est la même pour tous les points initiaux du plan objet et toutes les inclinaisons initiales, car elle ne dépend pas de l_1 et l_2 ; elle se compose de 2 termes, le premier

$$(6.15) \quad -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \frac{\theta}{2\alpha}$$

se rencontre dans le cas d'un axe rectiligne, il correspond à la variation de vitesse imposée par la variation d'énergie initiale et qui se transforme évidemment en retard. Le deuxième terme

$$(6.16) \quad -\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} \Re\left(\frac{1}{R} + \frac{\beta_1}{2\alpha} - i\frac{\beta_2}{2\alpha}\right) \varphi_0 e^{-i \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} - \frac{\mathcal{A}_t}{4\alpha}\right) ds}$$

est lié à la présence d'une dérive chromatique : il disparaît avec elle. Un système dont la dérive chromatique a été annulée possède donc des propriétés, relativement à la focalisation d'un point de l'axe et des retards, comparables à ceux d'un système centré habituel. Ce résultat est important pour l'étude de certains types de klystrons mentionnés dans l'introduction (chapitre premier).

Il n'est pas inutile de souligner, bien qu'elle soit très connue, la façon nettement différente dont se présente le problème de l'achroma-

tisme en optique corpusculaire et en optique. Dans l'un comme dans l'autre cas il s'agit d'une dispersion d'indice en fonction de l'énergie du corpuscule ou de la fréquence de la lumière mais les variations ne présentent pas du tout les mêmes caractères.

L'optique correspond évidemment au cas où il n'existe aucun champ magnétique, ce qui ramène le principe de moindre action maupertuisienne à se confondre avec celui de Fermat. L'indice ν joue le rôle de la racine carrée du potentiel corrigé $-\epsilon\varphi$ (ou du potentiel $-\epsilon\psi$ dans le cas de non relativiste). La dispersion des énergies initiales conduit à lui faire subir une modification bien déterminée en fonction de la grandeur θ qui caractérise l'écart par rapport au corpuscule moyen. Dans le cas de la lumière, il est possible en principe de jouer sur les propriétés optiques du milieu. L'indice peut varier d'une façon théoriquement arbitraire, sous réserve de conserver la forme des surfaces équi-indices. Cette restriction correspond à la conservation de la forme des surfaces de discontinuité formées par les dioptrés dans le cas habituel. On peut, en principe, procéder à une regraduation arbitraire, ou tout au moins largement indéterminée des surfaces équiindices, c'est-à-dire des surfaces équipotentiels. Tout se passe comme si ce dernier, défini par son développement était remplacé par une fonction $F(\varphi)$, ce qui donne pour le nouvel indice :

$$(6.17) \quad \nu^2 = F(\alpha + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 + \lambda^2\gamma_1 + \lambda\mu\gamma_2 + \mu^2\gamma_3 + \dots)$$

ou encore en développant F en série de Taylor :

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu^2 &= F(\alpha) + (\lambda\beta_1 + \mu\beta_2)F'(\alpha) + (\lambda^2\gamma_1 + \lambda\mu\gamma_2 + \mu^2\gamma_3)F'(\alpha) \\ &\quad + \frac{(\lambda\beta_1 + \mu\beta_2)^2}{2}F''(\alpha) + \dots \end{aligned} \right.$$

la fonction F est évidemment fonction également du paramètre θ (ici la longueur d'onde de la lumière dans le vide) qui caractérise l'écart par rapport au rayon moyen. θ étant petit on peut développer $F(\alpha, \theta)$ par rapport à θ , ce qui permet un traitement mathématique analogue à celui du présent chapitre. La forme (6.18) de la dispersion des indices est évidemment bien différente de celle que nous avons rencontrée en optique corpusculaire. C'est la raison de la plus grande souplesse de l'optique en matière de correction de l'achromatisme : un choix convenable de la dispersion des différents milieux traversés permet d'obtenir plus facilement les compensations globales, le long des trajectoires. Cet avantage est toutefois partiellement compensé par le fait que les indices ne peuvent varier que d'une manière discontinue à la traversée des dioptrés successifs, qu'on ne peut multiplier indéfiniment à cause des pertes qui interviennent sur chacun d'eux.

CHAPITRE VII

Phénomènes de charge d'espace.

Les phénomènes de charge d'espace ont été évoqués au chapitre IV ; la nécessité de satisfaire les relations (4.9) implique la création de champs électrique et magnétique par le courant corpusculaire. Il n'est pas question d'analyser complètement ces phénomènes, mais d'étudier certains de leurs aspects, utiles lorsqu'on envisage d'utiliser des pinceaux de forte intensité.

Nous avons décrit, dans les chapitres précédents, les propriétés des systèmes en considérant les conditions que doivent satisfaire les champs pour que les trajectoires possèdent un comportement simple : confusion des focales, isochronisme, etc. Il est possible de chercher à les préciser pour que, compte tenu des effets de charge d'espace, les trajectoires corpusculaires affectent certaines formes déterminées. Il ne s'agit évidemment que de conditions valables sur l'axe et en son voisinage immédiat occupé par le pinceau, toujours supposé très étroit. On néglige dans ce chapitre tout effet relativiste. ψ et φ sont identiques au potentiel électrique vrai.

Avant d'aborder le cas général des pinceaux d'axe courbe, il est bon de préciser les idées qui seront développées en rappelant comment on les utilise parfois dans le cas d'un axe rectiligne. Considérons un système centré purement électrostatique dont l'axe est une droite D : nous négligeons le champ magnétique créé par le faisceau, ce qui revient à ne tenir compte, pour étudier l'effet de la charge d'espace, que de la deuxième relation (4.9). Les propriétés focalisatrices sont décrites par l'équation fondamentale que nous récrivons :

$$(7.1) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' - 2\gamma\rho = 0, \quad z = \rho$$

alors que le potentiel au voisinage de l'axe est défini par :

$$(7.2) \quad \varphi = \alpha + \gamma(\lambda^2 + \mu^2) + \dots$$

la deuxième relation (4.9) s'écrit :

$$(7.3) \quad \alpha'' + 4\gamma = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \sigma.$$

Cherchons à réaliser un pinceau étroit formé de rayons parallèles à l'axe et définis par conséquent par :

$$(7.4) \quad \rho = A,$$

A étant une constante très petite; cette condition exige évidemment que (7.4) soit solution de (7.1), c'est-à-dire que :

$$(7.5) \quad \gamma = 0.$$

Si I désigne la densité de courant dans le pinceau, la charge d'espace σ est donnée par (on néglige ici toute correction de relativité) :

$$(7.6) \quad \sigma = \frac{I}{\sqrt{\frac{-2e\varphi}{m}}} = \frac{I}{\sqrt{\frac{-2ex}{m}}} + \dots$$

et la relation (7.3) devient, compte tenu de la nullité de γ :

$$(7.7) \quad \alpha'' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \frac{I}{\sqrt{\frac{-2ex}{m}}}.$$

L'équation (7.7) détermine la distribution α du potentiel sur l'axe; elle est identique à celle qui régit la distribution de potentiel entre deux plans entre lesquels circule, normalement à chacun d'eux, un faisceau infiniment large de corpuscules; elle s'intègre en :

$$(7.8) \quad s - s_0 = -\frac{2e}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\pi I}} \sqrt{K + \sqrt{\frac{mx}{-2e}}} \left(\sqrt{\frac{mx}{-2e}} - 2K \right)$$

s_0 et K sont des constantes que l'on peut déterminer en imposant des conditions aux limites appropriées.

On peut obtenir la distribution du potentiel dans l'espace, à distance non infiniment petite de l'axe, et par conséquent dans une région qui n'est pas occupée par le faisceau, en y résolvant l'équation de Laplace munie de la condition suivante : le potentiel φ , harmonique, se raccorde ainsi que ses dérivées premières, à la limite du pinceau, avec celui qui règne à l'intérieur de ce dernier. Son étroitesse vis-à-vis des dimensions des électrodes permet d'obtenir une répartition correcte du potentiel en considérant qu'il est harmonique, régulier, de révolution autour de D (ce qui assure la continuité des dérivées premières) et prend sur l'axe les valeurs données par (7.8). On obtient donc, au voisinage immédiat de D, mais en dehors du faisceau pratiquement concentré sur D, un potentiel défini par :

$$(7.9) \quad \varphi = \alpha + \gamma_1(\lambda^2 + \mu^2) + \dots$$

puisque φ est de révolution autour de l'axe. α est donné par (7.8) pour que φ prenne sur D les valeurs données par cette équation.

Le fait que φ est harmonique exige que :

$$(7.10) \quad \alpha'' + 4\gamma_1 = 0$$

cette équation détermine γ_1 et (7.7) entraîne :

$$(7.11) \quad \gamma_1 = \frac{-\pi I}{\varepsilon_0 \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}}}.$$

Il existe ainsi, à l'extérieur du faisceau, une courbure des équipotentielles qui ne se trouve pas dans ce dernier et dont le rôle est de compenser la brusque disparition de la charge d'espace.

On remarquera que le fait d'imposer au potentiel une symétrie de révolution autour de l'axe D est assez naturel, mais pas essentiel puisque seules les propriétés du premier ordre et du deuxième ordre du développement de φ nous sont utiles : des surfaces équipotentielles jouissant des mêmes propriétés que celles que nous avons imposées à φ hors du faisceau mais pour lesquelles on imposerait, au lieu de la symétrie de révolution, le fait d'être percées par l'axe en un ombilic seraient tout aussi satisfaisantes du point de vue des propriétés du premier ordre, car leur développement prendrait également la forme (7.9) : il y a donc un certain arbitraire dans la répartition du potentiel à distance de l'axe D qui est supprimé lorsqu'on exige que les surfaces soient de révolution. Cette condition impose des relations à tous les coefficients du développement de φ en λ , μ et pas seulement à ceux du premier et du deuxième ordre. On retrouvera cet arbitraire qui peut être utile en pratique dans le cas d'un axe curviligne autour duquel la notion de symétrie de révolution n'a plus de sens.

Dans le cas particulier où K est nul dans (7.8), ce qui correspond à une distribution suivant la loi de Langmuir et au fait qu'il existe une cathode portée au potentiel zéro et sur laquelle le champ est nul, la distribution dans l'espace est celle qui a été obtenue par Pierce : nous venons de reconstituer, en l'abordant sous un angle un peu différent, mais qui prépare la généralisation, l'optique classique dite « Optique de Pierce ». Lorsque K n'est pas nul on obtient un « système de Pierce » plus général qui peut servir à guider un faisceau intense d'une électrode à une autre lorsque la première d'entre elles n'est pas la cathode. Les constantes K et ε_0 sont imposées par les valeurs prises par le potentiel sur ces électrodes. La discussion du problème, qui est identique à celle de la diode plane dans le cas où les électrons y sont injectés avec des vitesses non nulles consiste à déterminer K en fonction de la différence de potentiels aux limites. Beaucoup moins simple qu'on ne le croirait au premier abord, cette discussion, entièrement menée à bien par différents auteurs sort du cadre de ce mémoire.

La méthode qui a conduit au système de Pierce est susceptible de généralisation : supposons avec Buneman, Condon et Latter que les trajectoires, au lieu d'être parallèles à l'axe rectiligne D soient formées à partir d'une solution φ_0 de (7.1) par la relation :

$$(7.12) \quad \rho = A\varphi_0,$$

Λ désignant une constante arbitraire, mais petite. Le pinceau est formé de trajectoires obtenues par affinité les unes à partir des autres. Il n'y a pas de difficultés à calculer la valeur de la charge d'espace sur l'axe D et à appliquer la méthode précédente avec une valeur non nulle de γ . Ce calcul ne sera pas développé ici car notre but est l'étude des systèmes d'axe curviligne et les idées qui viennent d'être exposées suffisent à mettre en relief les principes qui vont être mis en œuvre dans le cas général.

La méthode de Buneman, Condon et Latter, dont celle de Pierce n'est qu'un cas particulier, ne tient pas compte des « croisements » possibles de corpuscules. Ceux qui passent à un instant donné en un point donné peuvent, en principe, avoir les vitesses différemment orientées dans l'espace. On admet, ce qui est légitime si l'on néglige les distributions de vitesses initiales, qu'il n'en est pas ainsi : la vitesse est unique en chaque point, et, de plus, sa composante normale à l'« axe » est proportionnelle à l'écart par rapport à cet « axe » ; cette hypothèse suppose évidemment qu'il en est ainsi dans le plan initial où le faisceau est injecté.

Considérons un système gaussien d'axe curviligne Γ . Les coefficients qui définissent le potentiel électrique et le champ magnétique au voisinage de Γ satisfont les relations (3.6), (3.7), ainsi que les deux équations exigées par la disparition du terme en ρ^* dans l'équation fondamentale. Les trajectoires sont définies par (cf. (3.9)) :

$$(7.13) \quad z = \rho e^{-i\omega}$$

$$(7.14) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' + f\rho = 0,$$

f désigne comme précédemment le coefficient de ρ dans l'équation fondamentale (f est réel).

Supposons, comme au paragraphe précédent, que le pinceau soit constitué de trajectoires définies par :

$$(7.15) \quad z = Az_0 = A\rho_0 e^{-i\omega},$$

ρ_0 est une solution particulière de (7.14) égale à 1 pour s nul, c'est-à-dire dans le plan origine du pinceau ; c'est une fonction réelle. A est une constante complexe très petite que l'on peut écrire également :

$$(7.16) \quad A = A_1 + iA_2$$

ce qui donne, compte tenu de (3.8) :

$$(7.17) \quad \begin{cases} \lambda = \rho_0(A_1 \cos \omega - A_2 \sin \omega) \\ \mu = \rho_0(A_2 \cos \omega + A_1 \sin \omega) \end{cases}$$

d'où l'on tire le Jacobien :

$$(7.18) \quad \frac{D(\lambda, \mu)}{D(A_1, A_2)} = \rho_0^2$$

le vecteur courant j en un point possède évidemment des composantes transversales infiniment petites, sa seule composante finie est sa composante tangentielle j_t et la conservation de l'électricité exige que :

$$(7.19) \quad j \frac{D(\lambda, \mu)}{D(A_1, A_2)} = \mathfrak{J}(A_1, A_2).$$

$\mathfrak{J}$ est une fonction de A_1, A_2 qui est déterminée par la donnée de la distribution du courant dans un plan initial normal à Γ . Si l'on suppose que l'intensité est répartie quasi uniformément dans le pinceau, ce qui est généralement vrai des pinceaux de puissance qui ne sont pas destinés à la formation d'images, on peut exprimer A_1 et A_2 en fonction de λ et μ à partir de (7.17) et développer la valeur de j_t dont seule la partie finie nous intéresse :

$$(7.20) \quad j_t = \frac{\mathfrak{J}}{\rho_0^2}.$$

$\mathfrak{J}$ désigne maintenant une constante égale à la densité de courant transporté par le faisceau dans le plan origine défini par la nullité de s .

Pour satisfaire la première équation (4.9) nous écrirons donc que la partie finie du développement en λ et μ de la composante transversale de $\text{rot } H$ est nulle et que celle de la composante tangentielle est donnée par $4\pi\mu_0 j_t$.

On obtient ainsi :

$$(7.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_t + \frac{a_b}{T} - \frac{v_t}{R} = a'_n \\ c_t - \frac{a_n}{T} = a'_b \\ b_b - c_n = \frac{4\pi\mu_0 \mathfrak{J}}{\rho_0^2} \end{array} \right.$$

le terme fini du développement de la charge d'espace σ en fonction de λ et μ vaut évidemment :

$$(7.22) \quad \sigma = \frac{j_t}{\sqrt{-\frac{2ex}{m}}} = \frac{\mathfrak{J}}{\rho_0^2 \sqrt{-\frac{2ex}{m}}}$$

et la deuxième équation (4.9) s'écrit :

$$(7.23) \quad \alpha'' + 2\gamma_1 + 2\gamma_3 - \frac{\beta_1}{R} = \frac{4\pi\mathfrak{J}}{\epsilon_0 \rho_0^2 \sqrt{-\frac{2ex}{m}}}.$$

Les équations (7.21) et (7.23) remplacent les équations (4.11) et (4.12) lorsqu'on tient compte de l'existence d'une charge d'espace. Les deux premières équations (7.21) sont identiques aux deux dernières

équations (4.11). En portant ρ_0 extrait de la troisième équation (7.21) ainsi que de l'équation (7.23) dans (7.12), on obtient deux relations entre les coefficients des développements qui déterminent champs et potentiel : ces deux relations remplacent la première équation (4.11) et l'équation (4.12). Comme dans le cas où la charge d'espace ne joue pas, les équations sont en nombre insuffisant pour déterminer complètement l'allure des champs au voisinage de « l'axe » l' dans la zone occupée par le pinceau. Il subsiste un certain arbitraire.

Il est souvent possible de négliger le champ magnétique créé par le courant et de ne tenir compte que du champ électrique produit par la charge d'espace. Considérons un système purement électrostatique pour lequel cette hypothèse est valable. Le champ magnétique y est partout nul et l'on a affaire à un système gaussique si le potentiel φ prend la forme (4.6) :

$$(7.24) \quad \varphi = \alpha + \frac{2\alpha\lambda}{R} + \frac{3\alpha\lambda^2}{R^2} + \gamma(\lambda^2 + \mu^2) + \dots$$

ρ est déterminé par :

$$(7.25) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' - 2\gamma\rho = 0$$

l'équation (7.23) devient, compte tenu de (4.3) :

$$(7.26) \quad \alpha'' + 4\gamma + \frac{4\alpha}{R^2} = \frac{4\pi\mathcal{J}}{\epsilon_0\rho_0^2 \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}}}.$$

En portant ρ_0 tiré de (7.26) dans (7.25) on obtient une relation entre α et γ et le système généralise ceux de Buneman, Condon et Latter, dans le cas d'un axe quelconque. Si l'on suppose, de plus, que le pinceau est formé de parallèles à l'« axe » (7.25) doit admettre la solution constante, ce qui exige que γ soit nul. L'équation (7.26) devient :

$$(7.27) \quad \alpha'' + \frac{4\alpha}{R^2} = \frac{4\pi\mathcal{J}}{\epsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}}}$$

puisque ρ_0 , égal à l'unité pour s nul, garde cette valeur quel que soit s . $\mathcal{J}$ représente la densité de courant dans le faisceau. (7.29) détermine la répartition du potentiel sur l'axe (avec deux constantes arbitraires imposées par les conditions aux limites) : le système obtenu est l'équivalent, dans le cas d'un axe courbe, du système de Pierce rectiligne. L'intégration nécessite la connaissance de R , qui est une fonction de s . On peut l'effectuer complètement dans certains cas, par exemple si R est constant. On peut également profiter de la présence de R dans (7.27), pour imposer certaines conditions à α : si, par exemple, on exige que le

potentiel α reste constant sur l'axe Γ (faisceau non accéléré) (7.27) se réduit à :

$$(7.28) \quad \frac{\alpha}{R^2} = \frac{\pi j}{\varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e\alpha}{m}}}$$

le rayon de courbure est constant, il est imposé par la densité de courant et l'énergie des corpuscules du faisceau. On détermine ainsi un système de type Pierce (bien qu'en fait très différent) permettant le passage *sans accélération* d'un faisceau intense d'un point à un autre.

La répartition du potentiel hors du faisceau peut s'obtenir en supposant ce dernier assez étroit pour qu'on puisse le considérer comme concentré sur l'axe et en cherchant une fonction harmonique prenant sur Γ des valeurs données par (7.27), faisant avec cet axe un angle imposé par le terme en λ du développement (7.24) de φ dans le faisceau et présentant les mêmes propriétés de symétrie du deuxième ordre que celles qui sont définies par le développement. Le potentiel et le champ sont donc imposés sur la courbe Γ comme ils le sont dans l'optique rectiligne de Pierce. Les propriétés de symétrie nécessaires pour que l'on ait affaire à un système Gaussique sont un peu plus délicates. Elles imposent des conditions aux termes du deuxième ordre des développements en λ et en μ , mais pas au-delà. Elles sont analogues au fait d'imposer aux équipotentiellles autour d'un axe rectiligne d'être traversées par cet axe en un ombilic. Il reste donc un certain arbitraire dans la détermination du potentiel à distance de l'axe Γ , car il n'est plus possible d'imposer, comme dans le cas des axes rectilignes, la symétrie de révolution. Cette dernière impose des relations entre les coefficients de tous ordres du développement de φ en λ et μ autour d'un axe rectiligne.

Au voisinage immédiat de l'axe, hors du faisceau le potentiel prend donc la forme :

$$(7.29) \quad \varphi = \alpha + \frac{2\alpha\lambda}{R} + \frac{3\alpha\lambda^2}{R^2} + \gamma_1(\lambda^2 + \mu^2) + \dots$$

γ_1 doit être déterminé par le fait que φ est harmonique, ce qui impose :

$$(7.30) \quad \alpha'' + 4\gamma_1 + \frac{4\alpha}{R^2} = 0$$

ou encore, compte tenu de (7.26) :

$$(7.31) \quad \gamma_1 = \gamma - \frac{\pi j}{\varepsilon_0 \rho_0^2 \sqrt{\frac{2e\alpha}{m}}}$$

(7.31) montre qu'une courbure supplémentaire des équipotentiellles apparaît à l'extérieur du pinceau pour compenser la brusque disparition de la charge d'espace. En éliminant ρ_0 entre (7.31) et (7.25) on obtient la relation qui doit lier les quantités γ_1 , γ et α .

Dans le cas d'un système de Pierce, γ est nul et φ_0 égal à l'unité, on obtient donc directement la courbure supplémentaire (s'ajoutant à la courbure « naturelle » due au terme $\frac{3\alpha\lambda^2}{R^2}$) des équipotentielles par :

$$(7.32) \quad \gamma_1 = \frac{-4\pi\tilde{\gamma}}{\varepsilon_0 \sqrt{-\frac{2e\alpha}{m}}}$$

qui est identique à la formule fournissant la courbure des équipotentielles de Pierce dans le cas d'un système à axe rectiligne.

Si l'on cherche à réaliser un système utilisant les propriétés que l'on vient d'étudier en vue de « conduire » un faisceau de forte intensité, les équipotentielles seront données, au voisinage immédiat du pinceau, dans le système de coordonnées liées à l'axe, par le développement (7.29) dans lequel γ_1 prend la valeur (7.31). Pour placer les équipotentielles assez loin de l'axe, ce développement devient insuffisant, et il faut prolonger analytiquement la solution. Cela revient au même que de chercher une solution du problème posé au début du paragraphe précédent. On ne doit pas perdre de vue que la distribution de potentiel obtenue doit satisfaire les conditions de validité de l'approximation de Gauss : on le vérifiera *a posteriori*.

CHAPITRE VIII

Les systèmes orthogonaux.

L'étude des systèmes paraxiaux, effectuée au chapitre III a montré que le comportement des rayons était déterminé par l'équation (3.10), qui s'écrit :

$$(8.1) \quad 2\alpha\rho'' + \alpha'\rho' + f\rho + g e^{2i\omega}\rho^* = 0$$

f désigne donc comme précédemment le coefficient de ρ dans l'équation fondamentale.

Les coefficients de ρ et de ses dérivées sont tous réels ; le seul coefficient complexe est celui de ρ^* et l'on a vu que sa nullité entraîne les propriétés focalisatrices des systèmes gaussiques.

(8.1) condense évidemment deux équations réelles qui peuvent s'explicitier en introduisant les parties réelle ξ et imaginaire η de ρ . Ces équations comportent des termes en ξ et des termes en η , et il est, en général, impossible de séparer les deux variables. Il est cependant évident que, si le coefficient de ρ^* est réel, ξ et η sont régis par deux équations du deuxième ordre indépendantes mais pas nécessairement

identiques. D'une façon générale, on peut se demander à quelles conditions une séparation en deux équations du deuxième ordre indépendantes est possible. Effectuons donc une combinaison linéaire des variables ξ et τ , cela revient à substituer aux axes orthogonaux qui, dans le plan II normal à la courbe l' au point d'abscisse s , repèrent le voisinage de cette courbe, un système d'axes obliques X et Y . La variable :

$$(8.2) \quad Z = X + iY$$

est liée à la variable φ par une relation linéaire en Z et Z' qui peut s'écrire :

$$(8.3) \quad \rho = P(Z + Z') + Q(Z - Z') = 2PX + 2iQY$$

P et Q sont des coefficients complexes, fonctions de s . En substituant cette valeur de ρ dans (8.1) on obtient facilement :

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{aligned} &P \left[X'' + \left(2 \frac{P'}{P} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) X' + \left(\frac{P''}{P} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \frac{P'}{P} + \frac{f}{2\alpha} + \frac{ge^{2i\omega}}{2\alpha} \frac{P^*}{P} \right) X \right] \\ &+ iQ \left[Y'' + \left(2 \frac{Q'}{Q} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) Y' + \left(\frac{Q''}{Q} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \frac{Q'}{Q} + \frac{f}{2\alpha} - \frac{ge^{2i\omega}}{2\alpha} \frac{Q^*}{Q} \right) Y \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette équation se sépare en une équation en X et une équation en Y , il faut et il suffit que les coefficients des termes entre crochets soient réels. En effet, les équations séparées en X et Y peuvent s'écrire :

$$(8.5) \quad X'' + p_1 X' + p_2 X = 0, \quad Y'' + q_1 Y' + q_2 Y = 0$$

la forme la plus générale que peut prendre l'équation complexe est une combinaison linéaire à coefficients complexes des deux équations (8.5) et son identification avec (8.4) n'est possible que si les coefficients des termes entre crochets dans (8.4) sont réels. Comme α et f sont réels, les conditions nécessaires et suffisantes de séparation sont que l'on puisse trouver deux fonctions complexes P et Q telles que P'/P , Q'/Q , $ge^{2i\omega} P^*/P$, $ge^{2i\omega} Q^*/Q$ soient des quantités réelles : les deux premières conditions proviennent de la nécessité de rendre réels les coefficients de X' et Y' dans les crochets. Si P'/P et Q'/Q sont réels, une simple dérivation montre que P''/P et Q''/Q le sont également et les deux autres conditions sont imposées par la réalité des coefficients de X et Y dans les crochets de (8.4). Les deux premières conditions équivalent au choix pour P et Q de deux fonctions de modules arbitraires mais de phases constantes. Les deux dernières ne sont compatibles que si ces phases sont égales à une même valeur K ; elles se réduisent alors à la seule condition que $ge^{2i(\omega-K)}$ soit réel. La condition nécessaire et suffisante de séparation est donc que la quantité $ge^{2i\omega}$, qui n'est autre que le coefficient de φ^* dans (8.1) soit un nombre qui, lorsque s varie, reste

situé dans le plan complexe sur une droite Δ passant par l'origine ; il peut se déplacer sur elle suivant une loi d'ailleurs parfaitement arbitraire. Cela équivaut presque à dire que $ge^{2i\omega}$ possède une phase fixe ; toutefois s'il advient que ce nombre, en se déplaçant sur Δ franchisse l'origine, la phase subit une discontinuité multiple de π .

Si le coefficient de ρ^* satisfait la condition que l'on vient d'énoncer, il suffit de choisir $2K$ égal à la pente de la droite Δ et arbitrairement les modules de P et Q pour obtenir la détermination de la transformation (8.3) qui permet la séparation de l'équation fondamentale en deux équations du deuxième ordre indépendantes.

Si l'on veut que les deux équations (8.5) soient identiques, condition nécessaire à l'obtention des propriétés focalisatrices des systèmes gaussiques, il faut, non seulement que les coefficients de X' , Y' , X , Y dans les crochets de (8.4) soient réels, mais encore que les coefficients de X' et Y' soient égaux entre eux et que ceux de X et Y soient également égaux entre eux. La première de ces conditions signifie que P et Q sont proportionnels. La deuxième, compte tenu de cette proportionnalité implique la nullité de g .

La disparition du terme en ρ^ dans (8.1), condition suffisante pour que le système possède les propriétés d'un système gaussique est également une condition nécessaire.*

Dans le cas plus général où le coefficient de ρ^* reste situé, lorsque s varie, sur une droite Δ fixe et passant par l'origine, dans le plan complexe, on peut écrire, $2K$ désignant la pente de cette droite et $g_1(s)$ la loi du mouvement

$$(8.6) \quad ge^{2i\omega} = g_1(s)e^{2iK}.$$

g_1 est une fonction réelle qui peut être positive ou négative ; son module est égal à celui de g . L'étude faite précédemment a montré que, si l'on effectuait la transformation (8.3) on obtenait une séparation des variables ; P et Q ont des modules arbitraires mais leur phase doit être égale à K . La pente de Δ n'étant définie qu'à un multiple de π près, K ne l'est qu'à un multiple de $\pi/2$ près. Toutefois, si l'on remarque qu'ajouter à la phase de P et Q un certain nombre de fois l'angle droit revient à faire tourner les axes X et Y d'un certain nombre de fois l'angle droit, on constate que modifier la détermination de K revient, soit à permuter le rôle des axes X et Y en changeant l'orientation de l'un d'entre eux, soit à renverser l'orientation des deux axes. Il n'y a pas d'inconvénient à convenir que l'on choisit $2K$ égal à la détermination principale de la pente de Δ . Cette convention fixe de plus la valeur de $g_1(s)$ qui serait transformé en son opposé par addition de $\pi/2$ à K .

La relation (8.3) s'écrit :

$$(8.7) \quad \rho = (pZ + qZ^*)e^{iK},$$

p et q étant des fonctions réelles et arbitraires de s , ce qui montre que le passage des coordonnées ξ, τ aux coordonnées X, Y s'obtient par une rotation de l'angle K suivie d'une affinité arbitraire sur chacun des nouveaux axes. Cette affinité est sans importance car elle revient à modifier la graduation des axes. On n'enlève donc rien à la généralité en supposant qu'elle se réduit à l'identité obtenue en choisissant q nul et p égal à 1. (8.7) se réduit alors à une rotation constante des axes de coordonnées dans les plans Π normaux à Γ . Si l'on se souvient que les axes ξ et τ tournent par rapport aux axes définis par la normale et la binormale, on constate qu'il suffit d'ajouter à cette rotation un angle constant pour obtenir les axes X et Y .

En posant :

$$(8.8) \quad \omega_1 = \omega - K$$

on obtient directement les axes X, Y à partir des axes λ, μ par rotation de la quantité ω_1 et l'équation fondamentale devient :

$$(8.9) \quad 2\alpha Z'' + \alpha' Z' + fZ + ge^{2i\omega_1} Z^* = 0$$

alors que (8.6) s'écrit :

$$(8.10) \quad ge^{2i\omega_1} = g_1.$$

Ces relations montrent qu'il n'y a pas d'inconvénient à supposer K nul pourvu que l'on fixe convenablement l'origine des rotations ω (jusqu'ici arbitraire car seule la « vitesse de rotation » est déterminée) en remplaçant ω par ω_1 .

On conservera la notation X, Y, ω_1 pour signifier, soit que l'on se rapporte aux axes déduits de ξ et τ par rotation fixe, soit que l'on a fixé l'origine des rotations ω autour de Γ de façon à annuler K . ξ et τ coïncident alors avec X et Y et l'emploi de cette dernière notation s'interprète comme un simple changement du nom des coordonnées destiné à rappeler cette fixation de l'origine des angles ω .

Les équations séparées s'écrivent évidemment :

$$(8.11) \quad \begin{cases} 2\alpha X'' + \alpha' X' + (f + g_1)X = 0 \\ 2\alpha Y'' + \alpha' Y' + (f - g_1)Y = 0. \end{cases}$$

Les rayons issus d'un point objet O de l'axe Γ sont décrits par les solutions de ces équations nulles pour $s=s_0$ abscisse du point O . Toutes les solutions en X sont proportionnelles à l'une d'entre elles X_1 , il en est de même des solutions en Y (proportionnelles à Y_1). Les valeurs de s pour lesquelles s'annule soit X_1 , soit Y_1 donnent les positions sur Γ des deux systèmes de focales du pinceau. On retrouve le comportement des faisceaux paraxiaux d'axe rectiligne se propageant dans des systèmes cylindriques ou tout au moins symétriques par rapport à un plan passant par l'axe.

La répartition des champs au voisinage de Γ est donnée par les développements (3.2) et (3.3). Dans le cas général où il existe un champ électrique et un champ magnétique, il n'apparaît pas de symétrie très particulière, car, comme dans le cas des systèmes gaussiques, certaines dissymétries de l'un des champs peuvent être compensées par celles de l'autre. Nous nous bornerons donc à étudier l'allure des équipotentielles électriques d'un système purement électrostatique et orthogonal.

Compte tenu des relations (3.6), f et g prennent les valeurs :

$$(8.12) \quad \begin{cases} f = \frac{3z}{R^2} - \gamma_1 - \gamma_3 \\ g = \frac{3z}{R^2} + \gamma_3 - \gamma_1 - i\gamma_2 \end{cases}$$

La condition (8.10) s'écrit :

$$(8.13) \quad \frac{3z}{R^2} + \gamma_3 - \gamma_1 = g_1 \cos 2\omega_1, \quad \gamma_2 = g_1 \sin 2\omega_1$$

ce qui exige que les quantités R , α , γ et ω_1 (lié à T) soient telles que :

$$(8.14) \quad \frac{3z}{R^2} + \gamma_3 - \gamma_1 = \gamma_2 \cotg 2\omega_1.$$

On peut utiliser comme dans le cas des systèmes Gaussiques le potentiel « naturel lié à la courbure » φ_1 défini par :

$$(8.15) \quad \varphi_1 = \alpha \left(1 + \frac{2\lambda}{R} + \frac{3\lambda^2}{R^2} \right)$$

le potentiel φ est défini au voisinage de Γ par son développement qui se réduit à :

$$(8.16) \quad \varphi = \alpha + \frac{2\alpha}{R} \lambda + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda \mu + \gamma_3 \mu^2 + \dots$$

φ peut donc être considéré comme la superposition de φ_1 et d'un « potentiel supplémentaire » φ_2 défini par :

$$(8.17) \quad \varphi_2 = \left(\gamma_1 - \frac{3\alpha}{R^2} \right) \lambda^2 + \gamma_2 \lambda \mu + \gamma_3 \mu^2 + \dots$$

la variable z est liée à la variable Z par :

$$(8.18) \quad z = Z e^{-i\omega_1}$$

qui fournit les relations :

$$(8.19) \quad \lambda = X \cos \omega_1 + Y \sin \omega_1, \quad \mu = Y \cos \omega_1 - X \sin \omega_1.$$

Dans le système d'axes X, Y , on obtient la valeur de φ_2 en substituant (8.19) dans (8.17) ce qui, compte tenu de (8.13) donne :

$$(8.20) \quad \varphi_2 = -\frac{f+g_1}{2} X^2 + \frac{g_1-f}{2} Y^2 + \dots$$

le potentiel φ_2 est caractérisé par la disparition des termes en XY : c'est une condition équivalente à (8.13). Elle suffit à définir les systèmes orthogonaux. f et g_1 pouvant être quelconques, les coefficients de X^2 et Y^2 qui ne sont autres que les opposés des coefficients de X et Y dans les équations (8.11) peuvent être également quelconques.

L'orthogonalité est donc obtenue lorsque le « potentiel supplémentaire » qui s'ajoute au potentiel « lié à la courbure » possède précisément, dans le système d'axes X, Y , la symétrie plane (aux termes d'ordre supérieur au deuxième près naturellement) par rapport aux axes de coordonnées. Comme les axes X, Y tournent autour des axes normaux et binormaux d'un angle défini par ω_1 , cela signifie que le potentiel φ_2 présente une symétrie qui tourne avec X, Y . Dans le cas particulier des courbes planes, T est infini et ω_1 se réduit à une constante : les équipotentielles « supplémentaires », c'est-à-dire les surfaces telles que φ_2 soit constant doivent être telles que leurs directions principales soient fixes par rapport au plan de Γ . On retrouve dans ce cas le fait caractéristique des systèmes orthogonaux. Les équipotentielles présentent toutes des directions principales semblablement orientées.

Dans le cas général un système purement électrostatique orthogonal est caractérisé par le fait que le potentiel supplémentaire φ_2 , obtenu en retranchant le potentiel « lié à la courbure » φ_1 du potentiel réel φ , est défini par des équipotentielles normales à « l'axe » Γ et telles que les directions principales de chacune d'entre elles en son point de rencontre M avec Γ (directions évidemment situées dans le plan Π normal à Γ en M) tournent autour de cette courbe, lorsque M la décrit, avec une « vitesse » $d\omega/ds$ égale à la torsion $1/T$ de Γ au point M .

Les systèmes orthogonaux ne possèdent évidemment pas les propriétés focalisatrices des systèmes gaussiques. Ils peuvent cependant présenter un intérêt lorsqu'il n'y a pas lieu de réaliser des images, ce qui est le cas en général lorsqu'on cherche à « maintenir » sur sa trajectoire un pinceau de puissance, compte tenu de l'existence des effets de charge d'espace. Les méthodes envisagées au chapitre VII peuvent s'étendre sans difficultés à ce cas : on peut supposer par exemple que l'on a affaire à un faisceau se propageant dans un système électrostatique et dont les rayons sont définis par :

$$(8.21) \quad X = AX_1 \quad Y = BY_1.$$

X_1 et Y_1 étant des solutions particulières, égales à 1 au point de départ du pinceau, de chacune des équations (8.11) et A et B des constantes très petites pour que le faisceau reste étroit. Le calcul de la composante tangentielle j_t du courant, effectué au chapitre VII se transpose sans difficultés : on doit avoir :

$$(8.22) \quad j_t = \frac{j}{X_1 Y_1}$$

on en déduit la valeur de σ :

$$(8.23) \quad \sigma = \frac{\tilde{J}}{X_1 Y_1 \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}}}$$

et, si l'on néglige le champ magnétique créé par le faisceau, l'équation de Poisson s'écrit :

$$(8.24) \quad \alpha'' + 2\gamma_1 + 2\gamma_3 - \frac{\beta_1}{R} = \frac{4\pi\tilde{J}}{\epsilon_0 X_1 Y_1 \sqrt{\frac{-2e\alpha}{m}}}$$

en éliminant X_1 et Y_1 entre (8.24) et les deux équations (8.11) on obtient, compte tenu des valeurs de f' et g_1 , la relation que doivent satisfaire les quantités α , β , γ , R et T pour que la charge d'espace ne crée pas de divergence supplémentaire du pinceau. On peut, comme dans le cas des systèmes gaussiques, obtenir, par prolongement, hors du faisceau supposé très étroit, la forme des équipotentielles au voisinage de ce dernier.

CHAPITRE IX

Systèmes particuliers ; ordres de grandeur.

On étudiera, dans ce chapitre, quelques cas particuliers très simples suggérés par la théorie générale, dans le but de préciser les résultats par quelques ordres de grandeur. Il ne s'agit pas d'applications complètes qui ne pourraient être approfondies qu'à l'aide de machines mathématiques permettant l'approche des solutions par approximations et essais successifs.

Nous nous bornerons à des systèmes gaussiques *purement électrostatiques* avoisinant un axe courbe Γ ; les électrons seront supposés non relativistes.

Les équations essentielles sont alors :

l'équation des rayons paraxiaux (7.25),

l'équation du potentiel (7.24),

l'équation de Poisson (on néglige le champ magnétique créé par le courant) (7.26).

Le premier exemple sera consacré au cas où l'axe Γ est une hélice circulaire le long de laquelle le potentiel est constant : R , T et α sont

donc trois constantes. Si l'on suppose de plus que l'on néglige la charge d'espace, les équations se simplifient en :

$$(9.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho'' + \frac{\rho}{R^2} = 0 \\ \psi = \alpha \left(1 + \frac{2\lambda}{R} + \frac{2\lambda^2}{R^2} - \frac{\mu^2}{R^2} + \dots \right) \end{array} \right.$$

l'équation des rayons paraxiaux s'intègre immédiatement. Les fonctions ρ_1 et ρ_2 introduites au chapitre V sont égales à :

$$(9.2) \quad \rho_1 = R \sin \frac{s}{R}, \quad \rho_2 = R \cos \frac{s}{R},$$

le pinceau est donc focalisé, bien qu'il n'existe pas de champ magnétique, chaque fois qu'il a tourné autour de l'axe de l'hélice d'un angle $\frac{k\pi}{T} \sqrt{R^2 + T^2}$.

Le potentiel électrique est indépendant de s . Les équipotentielles sont obtenues en déplaçant le long de Γ un profil fixe situé dans un plan normal à cette dernière ; des considérations très simples de géométrie montrent que chaque point du profil décrit une hélice circulaire de même axe et de même pas que Γ . Les équipotentielles peuvent par conséquent être engendrées par déplacement hélicoïdal d'un profil fixe situé dans un plan passant par l'axe de Γ : leur allure rappelle celle des filets d'une vis.

L'équation du profil, dans les plans normaux à Γ , est définie par :

$$(9.3) \quad \frac{2\lambda}{R} + \frac{2\lambda^2}{R^2} - \frac{\mu^2}{R^2} = \text{Cte}$$

tant que l'on reste assez près de Γ pour que les termes d'ordre supérieur au deuxième puissent être négligés l'équation ci-dessus montre que le profil générateur des équipotentielles est formé d'une famille de coniques situées dans un plan Π normal à Γ . Elles sont toutes perpendiculaires à la normale $\bar{n}$ à Γ et possèdent en leur point de rencontre avec $\bar{n}$ une courbure déterminée. En particulier, l'équipotentielle passant par Γ est décrite par un profil dont la courbure, en son point de rencontre avec Γ , est égale à celle de l'hélice : c'est cette courbure des équipotentielles et leur forme « en pas de vis » qui assure sans champ magnétique les propriétés focalisatrices. Lorsque $R = T$ (cas de Gabor) le potentiel se réduit au potentiel logarithmique défini par deux cylindres coaxiaux.

Les défauts du premier ordre du système que nous venons de décrire peuvent se calculer d'après la méthode générale des chapitres précédents. La dispersion des temps de transit est donnée par :

$$(9.4) \quad \tau = -\frac{2}{R} \sqrt{\frac{m}{-2ex}} \Re \int_0^s \rho e^{-i \frac{s}{T}} ds$$

l'ensemble des rayons issus de l'axe au point origine correspond à :

$$(9.5) \quad \rho = lR \sin \frac{s}{R}.$$

l est une constante complexe, petite devant l'unité pour justifier l'approximation de Gauss (faible inclinaison des rayons sur l'axe).

Posons :

$$(9.6) \quad l = K_1 e^{iK_2}.$$

K_1 et K_2 sont deux constantes réelles, K_1 est positif et petit devant l'unité. En substituant la valeur de ρ dans (9.4) et après intégration :

$$(9.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau = -2\sqrt{\frac{m}{2e\alpha}} K_1 & \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{T}\right)\frac{s}{2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{T}} \sin\left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{T}\right)\frac{s}{2} - K_2\right] \right. \\ & \left. + \frac{\sin\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{T}\right)\frac{s}{2}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{T}} \sin\left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{T}\right)\frac{s}{2} + K_2\right] \right]. \end{aligned} \right.$$

On constate que τ ne peut être nul, quels que soient K_1 et K_2 , c'est-à-dire quelle que soit la direction initiale des rayons issus de l'axe dans le plan objet, que si N et M désignant deux entiers différents, mais de même parité, on a :

$$(9.8) \quad \frac{s}{\pi} = NR = MT.$$

Il en résulte que seules les hélices pour lesquelles le rapport R/T est un rapport simple différent de 1 permettent l'isochronisme en certains points de l'axe l'après un nombre peu élevé de focalisations. Ces points sont précisément des images de l'objet situé à l'origine des arcs sur l'. R/T est égal à la tangente de l'angle d'inclinaison de l'hélice par rapport au plan de son cercle de base. On doit éviter l'égalité des rayons de courbure et de torsion, c'est-à-dire une inclinaison de 45° . Il est difficile de penser réaliser des inclinaisons plus fortes. Il semble donc indiqué de choisir T supérieur à R ; par exemple, T peut être égal à $3/2R$, $2R$, $3R$, etc. correspondant à des valeurs des couples N, M égales à : 6,4 ; 4,2 ; 3,1, etc., puisque N et M doivent avoir même parité ; on obtient alors l'isochronisme au bout d'un nombre de focalisations égal à 6, 4, 3, etc. Le cas de Gabor, de potentiel très simple, ne permet pas l'isochronisme.

Si les rayons de torsion et de courbure ne satisfont pas les relations simples, ce qui revient à dire que les nombres N et M que l'on peut pratiquement toujours déterminer sont assez grands pour devenir sans intérêt, eu égard au nombre de tours que l'on fait effectuer au pinceau,

il n'y a plus d'isochronisme, toutefois, les dispersions des temps de transit restent limitées car on a nécessairement :

$$(9.9) \quad |\tau| < 2\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} K_1 RT \left(\frac{1}{R+T} + \frac{1}{T-R} \right).$$

Dès que T est assez grand devant R (par exemple pour $T = 2\pi R$ qui correspond au pas 1, c'est-à-dire à une hélice telle que l'on s'élève à chaque tour d'une quantité égale au rayon du cylindre porte-hélice), (9.9) devient, si l'on tient compte du fait que K_1 est petit devant l'unité :

$$(9.10) \quad |\tau| \ll 4\sqrt{\frac{m}{-2e\alpha}} R.$$

Pour des électrons :

$$(9.11) \quad |\tau|_{(\mu s)} \ll \frac{R_{(cm)}}{15\sqrt{\alpha_{(volts)}}}.$$

Avec des électrons de 100 volts et un rayon de 10 cm, $|\tau|$ reste très inférieur au dixième de microseconde.

Naturellement, à cette dispersion s'ajoutent, comme dans le cas des axes rectilignes, des quantités d'ordre supérieur par rapport à l'ouverture K_1 du pinceau.

La « dérive chromatique » entre objet et image est donnée par la formule (6.9). Les abscisses des points images sont :

$$(9.12) \quad s = N\pi R$$

N est un entier quelconque :

(6.9), tous calculs faits, devient :

$$(9.13) \quad \rho_1 = \frac{\theta}{\alpha} \frac{RT^2}{T^2 - R^2} \left[(-1)^N - \cos \frac{N\pi R}{T} - i \sin \frac{N\pi R}{T} \right].$$

On constate que ρ_1 s'annule si l'on a, M étant entier de même parité que N :

$$(9.14) \quad NR = MT.$$

On retrouve ainsi, dans ce cas particulier, le résultat général énoncé au chapitre VI : l'annulation de la dérive chromatique entraîne l'isochronisme et réciproquement.

D'une façon générale, si R et T ne satisfont pas les conditions d'isochronisme, la dérive chromatique est limitée par :

$$(9.15) \quad |\rho_1| < \frac{2\theta}{\alpha} \frac{RT^2}{T^2 - R^2}.$$

Lorsque T est grand devant R on obtient :

$$(9.16) \quad |\rho_1| < \frac{2\theta}{\alpha} R.$$

Si l'on se souvient que θ représente, traduite en unités de potentiel, la dispersion des énergies initiales, θ/α est égal à la dispersion relative

des énergies dans le système focalisateur. Lorsque l'agitation thermique des électrons issus de la cathode est la seule cause d'achromatisme, θ est de l'ordre du dixième de volt. θ/α est alors égal à 10^{-3} pour des électrons de 100 volts parcourant la structure. Le brouillage dû à « la dérive chromatique », c'est-à-dire le déplacement maximum des images normalement à l'axe Γ est de deux millièmes du rayon de courbure, soit deux dixièmes de millimètre pour un rayon de 10 cm.

Comme les dimensions de l'image doivent rester faibles devant R et T (par exemple de l'ordre de $R/10$), il est impossible d'obtenir une définition supérieure à 50 points : elle serait portée à 500 points si l'on utilisait des électrons de 1 000 volts.

On doit se souvenir que le choix judicieux du rapport T/R permet l'annulation de ρ_1 , et, par suite, l'amélioration des performances : l'achromatisme se réduit alors à une aberration du deuxième ordre.

Un deuxième exemple fera intervenir les phénomènes de charge d'espace : considérons un système du « type Pierce » dans lequel le potentiel α reste constant le long de l'axe Γ du pinceau ; α est lié à R par la relation (7.28).

R est donc constant. On peut réaliser Γ en supposant que T l'est également. On a alors une hélice circulaire pour « axe ». Le potentiel, au voisinage de Γ , mais hors du faisceau (supposé concentré sur l'axe) est défini par (7.29) et (7.32) :

$$(9.17) \quad \varphi = \alpha \left(1 + \frac{2\lambda}{R} - \frac{\lambda^2}{R^2} - \frac{4\mu^2}{R^2} + \dots \right).$$

Comme dans le cas étudié précédemment, les équipotentielles, au voisinage de Γ , sont engendrées par des coniques dont le plan est normal à l'axe Γ . Leur profil normalement à l'hélice présente une courbure : celle de l'équipotentielle zéro est égale à $R/4$. Cette courbure, qui donne une allure en « filet de vis » aux surfaces équipotentielles empêche précisément la divergence du pinceau. La relation (7.28) s'écrit numériquement, dans le cas où l'on a affaire à des électrons :

$$(9.18) \quad \frac{(\alpha(\text{volts}))^{3/2}}{(R(\text{cm}))^2} = 70 \mathcal{I}(\text{mA/cm}^2).$$

Si l'on considère un rayon de 10 cm comme un ordre de grandeur raisonnable, on obtient des densités de courant de l'ordre de 0,15 mA/cm² pour des électrons de 100 volts, et de 150 mA/cm² pour des électrons de 10 000 volts. Comme les dimensions du pinceau doivent être petites devant le rayon de courbure, on peut envisager des sections inférieures ou égales à 1 cm², ce qui conduit à un courant de 150 mA sous 10 000 volts. Le système permet donc le guidage de pinceaux intenses sans que les phénomènes de charge d'espace interviennent pour les faire diverger, tout au moins au premier ordre d'approximation. Il n'utilise pas de champ magnétique.

CONCLUSION

Les exemples développés au chapitre IX montrent que la courbure de « l'axe » d'un pinceau peut présenter certains avantages spécifiques et conduire à des systèmes qui n'ont pas leur équivalent dans le cas des axes rectilignes ; l'intérêt qu'ils offrent est évident pour certaines des applications qui ont été passées en revue dans le premier chapitre. On a remarqué que les propriétés des faisceaux, étudiées dans le cadre de l'approximation de Gauss, conduisent à des relations entre champs et potentiel au voisinage immédiat de l'axe qui traduisent, au fond, les propriétés de courbure que doivent présenter les lignes de champ, ou les surfaces équipotentielles. Le cas des systèmes purement électrostatiques auquel nous avons souvent eu recours met ce fait particulièrement en évidence. Il est en général possible de réaliser de multiples façons, au moyen d'électrodes et de bobines placées à quelque distance de la courbe l , des champs qui présentent au voisinage de cette dernière les propriétés désirées, en particulier, l'orientation et la courbure des équipotentielles. On cherchera évidemment à simplifier autant que possible les systèmes producteurs de champ. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que les conditions dans lesquelles l'approximation de Gauss est valable doivent être satisfaites. Il y a là une condition qui doit être vérifiée après coup : la détermination des structures est donc un problème d'approximations successives. Puisque les champs doivent être harmoniques (si l'on néglige la charge d'espace) les variations longitudinales sont liées aux variations transversales : en général, les conditions de validité de l'approximation de Gauss sont satisfaites si, le pinceau restant étroit devant R et T, les grandeurs qui définissent les champs et le potentiel ($a, b, c, x, \beta, \gamma$, etc.) ainsi que R et T ne varient pas trop rapidement en fonction de s .

Ces indications qualitatives pourraient être précisées quantitativement si l'on poussait plus loin les développements. Nous n'avons pas voulu entreprendre cette étude dans le présent mémoire : elle est intimement liée à celle des aberrations du deuxième ordre.

Il n'est pas dans notre intention de revenir sur les indications du chapitre premier qui permettent de se rendre compte des applications de la théorie qui vient d'être développée. Nous voudrions seulement, en concluant cette étude, indiquer les directions générales dans lesquelles elle mériterait probablement d'être prolongée.

La première consiste naturellement à pousser au deuxième ordre les formules d'approximation de façon à calculer les aberrations et à préciser comme on l'a indiqué en X, les conditions de validité de l'approximation de Gauss. On obtiendrait ainsi des conditions supplémentaires d'un ordre supérieur, à imposer aux champs pour obtenir la focalisation la plus favorable ainsi que le minimum de dispersion des temps de

transit si besoin est. Le calcul des aberrations a déjà été effectué notamment par P. A. Sturrock.

La deuxième, qui reste théorique, consisterait à introduire systématiquement dans les formules générales les termes variables avec le temps — quitte éventuellement à supposer qu'il se superpose des champs variables très petits au champ statique, et à introduire un développement limité. On obtiendrait ainsi la possibilité d'étudier les interactions du pinceau avec des champs variables, essentielle, au même titre que celle du guidage du pinceau statique, aux applications aux tubes hyperfréquences et aux accélérateurs de particules.

La troisième enfin est constituée de tous les cas particuliers d'application. Chacun d'eux, nous l'avons dit, est un problème dont la théorie générale ne fait que fournir les éléments de l'étude.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) M. COTTE. — Recherches sur l'optique électronique. *Annales de Physique*, 1938, **110**, 333.
- M. COTTE. — Les aberrations des systèmes orthogonaux de l'optique électronique à l'approximation relativiste. *Annales de Physique*, 1939, **11**, 351.
- (2) P. A. STURROCK. — The imaging properties of electron beams in arbitrary static electromagnetic fields. *Philos. Trans. of the Roy. Soc.*, 1952, **155**, 245.
- (3) W. GLASER. — *Elektronenoptik*. Springer.
- W. GLASER. — Elektronen und Ionenoptik. Article dans le tome **33** du *Handbuch der Physik*. Springer, 1956.
- (4) D. GABOR. — Electron optical systems with helical axis. *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **64 B**, 244.
- (5) G. WENDT. — Zur Dioptrik Elektronenoptischer Geräte mit beliebig gekrümmten Abbildungsachsen. *Z. Phys.*, 1943, **120**, 720.
- (6) H. GRUMM. — Elektronen und Ionenbündel mit krummer Achse (Wellenmechanisch betrachtet). *Optik*, 1955, **12**, 153.
- (7) W. GLASER et P. SCHISKE. — Elektronenoptische Abbildung auf Grund der Wellenmechanik. *Annalen der Phys.*, 1953, **12**, 240.
- (8) L. A. MACCOLL. — Trajectories of monoenergetic electrons in an arbitrary static electromagnetic field, in the neighbourhood of a given trajectory. *J. Math. Phys.*, 1941, **20**, 355.
- (9) BUNEMAN, CONDON et LATTER. — U. S. Atomic Energy Commission. *Papers : M.D.D.C.*, 517 et 586.
- BECK. — *Thermionic Valves*. Cambridge Univ. Press, 1953, chap. 6, § 6.5.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE

Antiprotons et antineutrons.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 8 décembre 1937.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

